13.XI. 2015 Whitney cd.

1) Ozn. $\mathcal{J}^m(K) = \{ \underbrace{(f^\alpha)_{|\alpha|\le m}}_{=F} \mid f^\alpha : K \to \mathbb{R} \text{ ciągłe} \}$

$K \subset \mathbb{R}^n$ zwarty

Piszemy $T_a^m F(x) = \sum_{|\alpha|\le m} f^\alpha(a) \frac{(x-a)^\alpha}{\alpha!}$, $R_a^m F = F - \tilde{T}_a^m F$

(gdzie $\tilde{T}_a^m F$ = jet wyznaczony przez wiel. $T_a^m F$)

DEF $C^m(K)$ = m-jety Whitney'a $= \{ F \in \mathcal{J}^m(K) :$ zachodzi jeden z równoważnych war. Tw 1 $\}$

Tw (1) .... nieco słabszy od (2)

(2) $|(R_x^m F)^\alpha(y)| \le \omega(|x-y|)\, |x-y|^{m-\alpha}$, $x, y \in K$,

dla pewnego modułu ciągłości ω

(3) $|T_x^m F(z) - T_y^m F(z)| \le \omega_1(|x-y|)\left(|x-z|^m + |y-z|^m\right)$

dla $x, y \in K$, $z \in \mathbb{R}^n$, modułu ciągłości ω_1

Lemat $T_x^m F(z) - T_y^m F(z) = \sum_{|\alpha|\le m} \frac{(z-x)^\alpha}{\alpha!} (R_y^m F)^\alpha(x)$

Dow (3) $\Rightarrow$ (2) Z Lematu:

$$\left| \sum (R_y^m F)^\alpha(x) \frac{(z-x)^\alpha}{\alpha!} \right| \le \omega_1(|x-y|)\left(|x-z|^m + |y-z|^m\right)$$

Kładziemy $z - x = |x-y|(z'-x)$; $|x-y| = \lambda > 0$ $\Rightarrow$

$$\left| \sum_{|\alpha|\le m} (R_y^m F)^\alpha(x) \frac{\lambda^{|\alpha|}}{\alpha!} (z'-x)^\alpha \right| \le \omega_1(|x-y|) \cdot C\lambda^m \left(1 + |z'-x|^m\right)$$

gdyż $y - z = y - x - (z - x)$.

zmiennej $\xi = z' - x$

Po lewej – wielomian; współczynniki to komb. liniowe wartości w skończonej liczbie punktów

$$\Rightarrow \left| (R_y^m F)^\alpha(x) \frac{\lambda^{|\alpha|}}{\alpha!} \right| \le C\, \omega_1(|x-y|)\, \lambda^m$$

inna stała...

i stąd teza. $\boxtimes$

<u>Lemat Whitney'a</u> – naszkic z poprzedniego razu

<u>Tw Whitney'a</u> Dla jeśli $F = (f^\alpha) \in C^m(K)$ funkcja

$$WF(x) = \begin{cases} f^0(x), & x \in K \\ \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_j(x)\, T_{a_j}^m F(x), & x \notin K, \end{cases}$$

gdzie (φ_j) – Whitney'owski rozkład 1 na $\mathbb{R}^n \setminus K$

$\operatorname{dist}(a_j, \operatorname{supp} \varphi_j) = \operatorname{dist}(K, \operatorname{supp} \varphi_j)$,

jest klasy $C^m(\mathbb{R}^n)$ (i klasy C^∞ na $\mathbb{R}^n \setminus K$),

$D^\alpha(WF) = f^\alpha$ na K.

<u>Dow.</u> Gładkość poza K – oczywiste wobec gładkości φ_j i wielomianów $T_{a_j}^m F$.

Dalej piszemy $WF \equiv \tilde{f}$ (funkcja na $\mathbb{R}^n$)

ale równocześnie, gdy to wygodne, traktujemy $\tilde{f}$ jak m-jet:

$$\tilde{f}^\alpha = \begin{cases} f^\alpha & \text{na } K \\ D^\alpha \tilde{f} & \text{poza } K \end{cases} \qquad (|\alpha| \le m)$$

<u>CEL</u>: $\tilde{f} \in C^m(\mathbb{R}^n)$

<u>Lemat</u> Niech $K \subset\subset Q$ (Q - duża kostka w $\mathbb{R}^n$)
$\lambda := \sup_{x \in Q} (\operatorname{dist}(x, K))$. Wtedy: $\exists\, C = C(m, n, \lambda)$

$$|\tilde{f}^\alpha(x) - D^\alpha T_a^m F(x)| \leq C\,\omega(|x-a|)\,|x-a|^{m-|\alpha|}, \quad a \in K,\ x \in Q$$

Dowód tego Lematu na razie odkładamy; pokażemy, jak wynika zeń, że $\tilde{f}$ jest klasy C^m i $D^\alpha \tilde{f} = f^\alpha$ na całym K.

Niech $|\alpha| < m$, $a \in K$, $x \in Q$, $e_j = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$

Pokażemy

$$\left| \tilde{f}^\alpha(x) - \tilde{f}^\alpha(a) - \sum_{j=1}^{n} (x_j - a_j) f^{\alpha + e_j}(a) \right| = o(|x-a|)$$

Istotnie, lewa strona

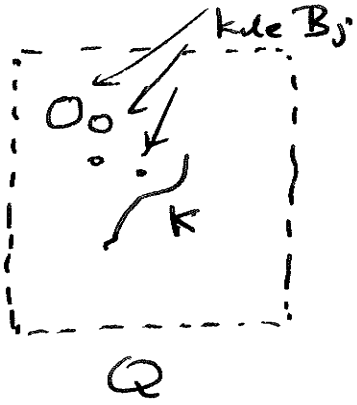
$$\leq \underbrace{|\tilde{f}^\alpha(x) - D^\alpha T_a^m F(x)|}_{= o(|x-a|) \text{ z Lematu}} + \underbrace{\left| \sum_{\substack{|\beta| \geq 2 \\ |\beta| \leq m - |\alpha|}} \frac{(x-a)^\beta}{\beta!} f^{\alpha+\beta}(a) \right|}_{= O(|x-a|^2)}.$$

Stąd: $f^{\alpha + e_j} = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_j}$ na K, ergo: $\tilde{f} \in C^m(\mathbb{R}^n)$ oraz $D^\alpha \tilde{f} = f^\alpha$ na K (Tatar indukcyjnie).

Dowód Lematu to rachunek, sprytnie zaprojektowany przez Whitney'a i wykorzystujący własności rozkładu $1 = \sum \varphi_j$ oraz pokrycie $(6B_j)_{j \in \mathbb{N}}$.

Krok 1 : jeśli $a \in K$ oraz $x \in K$, to oszacowanie z Lematu jest spełnione, bo F jest jetem Whitney'a

Krok 2 Odtąd $a \in K$, $x \in Q \setminus K$



Piszemy

$$D^\alpha \tilde{f}(x) = \sum_j D^\alpha\left(\varphi_j(x)\, T^m_{a_j} F(x)\right)$$

$$= \sum_j \sum_{\beta+\gamma=\alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^\beta \varphi_j(x)\, D^\gamma T^m_{a_j} F(x)$$ wzór Leibniza

Uwaga : można tak pisać, gdyż każdy pkt $x \notin K$ ma otoczenie, które przecina jedynie skończoną liczbę kul B_j.

Stąd

$$D^\alpha \tilde{f}(x) - D^\alpha T^m_a F(x) = S_1 + S_2 \quad , \text{ gdzie}$$

$$\begin{cases} S_1 = \sum_j \varphi_j \left(D^\alpha T^m_{a_j} F - D^\alpha T^m_a F\right) & \left(\text{bo } \sum \varphi_j \equiv 1 \,!\right) \\ S_2 = \sum_j \sum_{\substack{\beta>0 \\ \beta+\gamma=\alpha}} \binom{\alpha}{\beta} D^\beta \varphi_j \, D^\gamma T^m_{a_j} F \end{cases}$$

Oddzielnie szacujemy obie sumy.

Krok 3 Szacowanie S_1. x ustalony; jest $\leq C(n)$ składników, dla których $x \in \operatorname{supp} \varphi_j$, $\varphi_j(x) \neq 0$.

$$|x - a_j| \leq \operatorname{diam}(\operatorname{supp} \varphi_j) + \operatorname{dist}(\operatorname{supp} \varphi_j, K)$$

$$\leq 2 \operatorname{dist}(\operatorname{supp} \varphi_j, K) \quad \text{wobec własności kul } B_j$$

$\leq 2|x-a|$ z def. odległości zbiorów domkn.

$|a-a_j| \leq |a-x| + |x-a_j| \leq 3|x-a|$

Z warunku (3) TW 1 o własnościach jetów $\in C^m(K)$:

$$|D^\alpha T^m_{a_j} F(x) - D^\alpha T^m_a F(x)| \qquad \boxed{\omega(\lambda t) \leq \lambda \omega(t)}$$

$$\leq C\omega(|x-a|)\, |x-a|^{m-|\alpha|} \qquad (\text{wklęsłość } \omega\,!)$$

<u>Krok 4</u> Szacowanie sumy S_2. Tu korzystamy z własności

$$\sum_j \varphi_j \equiv 1 \text{ na } \mathbb{R}^n \setminus K \implies \sum_j D^\beta \varphi_j \equiv 0 \text{ na } \mathbb{R}^n \setminus K$$

dla $\beta > 0$.

Zatem, przy ustalonym β oraz $\gamma = \alpha - \beta$

$$\sum_j D^\beta \varphi_j(x)\, D^\gamma T^m_{a_j} F(x)$$

$$= \sum_j D^\beta \varphi_j(x) \left(D^\gamma T^m_{a_j} F(x) - D^\gamma T^m_b F(x) \right) \qquad \binom{*}{*}$$

dla dowolnego $b \in K$. Bierzemy $b \in K$ t. że

$|x-b| = \operatorname{dist}(x,K) \leq |x-a_j|, \leq |x-a|$

Jak poprzednio sprawdzamy, że $|x-a_j| \leq 2|x-b|$,

$|b-a_j| \leq 3|x-b|$ i widzimy, że każdy składnik sumy $\binom{*}{*}$

szacuje się przez

$$|D^\beta \varphi_j(x)| \cdot C\omega(|x-a|)\, |x-a|^{m-|\gamma|} = \Delta_{a,x}$$

Ale: na $6B_j$ $\quad |D^\beta \varphi_j| \lesssim r_j^{-|\beta|} \approx |x-a|^{-|\beta|}$

więc $\Delta_{a,x} \lesssim \omega(|x-a|)\, |x-a|^{m-|\alpha|}$, $\alpha = \beta + \gamma$.

Stąd już łatwo teza, bo S_2 jest kombinacją skończonej liczby takich składników ... $\boxtimes$

<u>Uwaga</u>: Z dowodu wynika, że

$F \mapsto WF$ jest operatorem <u>ciągłym</u>

Przykład Whitney'a, o ile czas pozwoli.