Wykład, 3.XI.2015

TWIERDZENIE SARDA

Niech $f: \mathbb{R}^m \supset U \to \mathbb{R}^n$ będzie klasy C^∞. (Zakładamy, że zbiór U jest otwarty w $\mathbb{R}^m$).
Wówczas zbiór wartości krytycznych f ma n-wymiarową miarę Lebesgue'a zero.

Przypomnijmy przed dowodem:

$Z \subset \mathbb{R}^n$ jest miary zero $\overset{df}{\iff} \forall \varepsilon > 0 \ \exists B(x_i; r_i)$ $(i = 1, 2, \dots)$ t. że $Z \subset \bigcup_{i=1,2,\dots} B(x_i, r_i)$ oraz

$$\sum_{i=1}^{\infty} r_i^n < \infty.$$

Punkty krytyczne f to punkty, w których $\operatorname{rank} Df < \min(m, n)$. Zbiór wartości krytycznych to obraz zbioru punktów krytycznych.

W dowodzie wykorzystamy następującą własność:

FAKT: Jeśli $Z \subset \mathbb{R}^n$ i dla każdego $a \in \mathbb{R}$

$$Z \cap (\{a\} \times \mathbb{R}^{n-1})$$

jest zbiorem $(n-1)$-wymiarowej miary 0, to Z jest zbiorem miary zero.

Dowód Niech $S = \operatorname{Crit} f = \{x \in U : \operatorname{Rank} Df(x) < \min(n, m)\}$.
$S_i = \{x \in U : D^\alpha f(x) = 0 \ \ \forall \alpha : |\alpha| \leq i\}$.
Zbiory S, S_i są domknięte; mamy

$$S \supset S_1 \supset S_2 \supset \dots$$

$\boxed{1^A}$

<u>Uwaga</u>: w dowodzie tw. Sarda wykorzystuje się, poza faktu ze str. $\boxed{1}$, następujące własności miary Lebesgue'a:

(a) kostka $Q = I_1 \times \ldots \times I_n$, gdzie I_j jest odcinkiem długości d, ma n-wymiarową miarę d^n;

(b) Miara Lebesgue'a jest monotoniczną, addytywną funkcją zbioru;

(c) Jeśli $A \subset \bigcap_{N=1}^{\infty} A_N$, $A, A_N \subset \mathbb{R}^n$, oraz $|A_N| \longrightarrow 0$ dla $N \to \infty$, to $|A| = 0$.

Ich dowody poznamy za kilka tygodni!

$\boxed{2}$ Dalej: indukcja względem m. Dla $m=0$, $n=0$ tw. jest oczywiste.

Dowód będzie wynikał z trzech lematów:

<u>Lemat 1</u>. Zbiór $f(S \setminus S_1)$ jest miary zero w $\mathbb{R}^n$

<u>Lemat 2</u>. Dla $i \geq 1$, $f(S_i \setminus S_{i+1})$ jest miary zero w $\mathbb{R}^n$.

<u>Lemat 3</u>. Dla dostatecznie dużych k, $f(S_k)$ jest zbiorem miary zero w $\mathbb{R}^n$.

(Proszę zauważyć, że w świetle def. (a) suma przeliczalnie wielu zbiorów miary zero jest też miary zero, (b) podzbiór zbioru miary zero też jest miary zero).

<u>Dowód Lematu 1</u> Wolno założyć, że $n \geq 2$ (bo dla $n=1$ jest $S = S_1$ i nie ma tu czego dowodzić).

Niech $\bar{x} \in S \setminus S_1$. Wskażemy zbiór otw. $V \subset \mathbb{R}^m$ taki, że

(1) $\quad \bar{x} \in V, \quad f(V \cap S)$ ma miarę zero.

Ponieważ $S \setminus S_1$ można pokryć przeliczalnie wieloma takimi zbiorami otwartymi, wyniknie stąd teza Lematu.

Skoro $\bar{x} \notin S_1$, więc (np.) $\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\bar{x}) \neq 0$. Połóżmy

$$h: \mathbb{R}^m \supset V \longrightarrow \mathbb{R}^m, \quad h(x) = (f_1(x), x_2, \ldots, x_m)$$

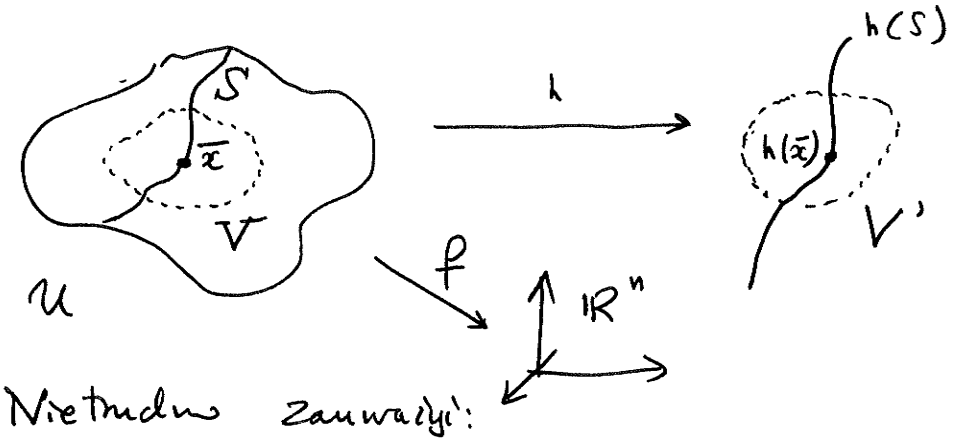
Macierz $Dh(\bar{x})$ jest trójkątna i $\det Dh(\bar{x}) \neq 0$, więc

$\boxed{3}$

(z tw. o lokalnej odwracalności) istnieje $\underset{\text{otw.}}{V} \ni \bar{x}$ taki, że

$$h|_V : V \longrightarrow V' \quad \text{jest dyfeomorfizmem kl. } C^\infty$$

Niech $\quad g := f \circ h^{-1} : V' \longrightarrow \mathbb{R}^n$



Nietrudno zauważyć:

(a) $S' = \operatorname{Crit} g = h(S \cap V)$

(b) $g(S') = g(\operatorname{Crit} g) = f(S \cap V)$

(c) Wskutek doboru h, dla $(t, x_2, \dots, x_m) \in V'$

$$g(t, x_2, \dots, x_m) = (t, \underbrace{g_2(t, x_2, \dots, x_m), \dots, g_n(t, x_2, \dots, x_m)}_{= g^t}),$$

tzn. g przeprowadza $(m-1)$-wymiarowe hiperpłaszczyzny $\cap V'$ w $(n-1)$-wymiarowe hiperpłaszczyzny, postaci $\{t\} \times \mathbb{R}^{n-1}$.

Rozpatrzmy rodzinę gładkich odwzorowań

$$g^t : (\{t\} \times \mathbb{R}^{m-1}) \cap V' \longrightarrow \{t\} \times \mathbb{R}^{n-1}$$

Punkt $p \in (\{t\} \times \mathbb{R}^{m-1}) \cap V'$ jest krytyczny dla g^t $\Leftrightarrow$ jest krytyczny dla g, bo

$$Dg(p) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \dots 0 \\ * & \\ \vdots & \left[\frac{\partial g_i^t}{\partial x_j}\right]_{j \geq 2} \\ * & \end{pmatrix}.$$

Z założenia indukcyjnego: $g^t(\mathrm{Crit}\, g^t)$ ma $(n-1)$-wymiarową miarę 0 w $\mathbb{R}^{n-1}$. Wobec FAKTU na str. 1:

$$g(\mathrm{Crit}\, g) \cap (\{t\} \times \mathbb{R}^{n-1}) \text{ ma } (n-1) \text{ wym. miarę } 0$$

$$\Downarrow$$

$$f(S \cap V) = g(\mathrm{Crit}\, g) \text{ ma } n\text{-wymiarową miarę } 0.$$

<u>Dowód Lematu 2</u> (zasadniczo podobny do dow. Lematu 1).

Ustalmy $\bar{x} \in S_i \setminus S_{i+1}$. Z dokładnością do numeracji zmiennych w $\mathbb{R}^m$ wolno założyć, że

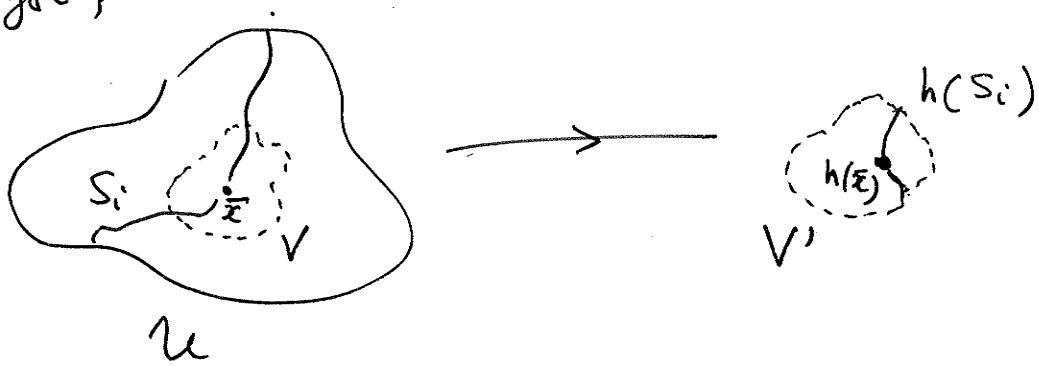
$$\exists \alpha : |\alpha| = i, \quad W := D^\alpha f(\bar{x}) = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial x_1}(\bar{x}) \neq 0.$$

Postępujemy jak w Lemacie 1:

$$h : \mathbb{R}^m \supset U \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

$$h(x) = (W(x), x_2, \dots, x_m), \quad Dh(\bar{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial W}{\partial x_1} & 0 \dots 0 \\ * & \\ \vdots & \boxed{\mathrm{Id}} \\ * & \end{pmatrix}$$

więc w pewnym otoczeniu V punktu $\bar{x}$ h jest dyfeo,



Podobnie jak wcześniej, rozpatrujemy

$$g := f \circ h^{-1} : V' \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

Ponieważ $W = D^\alpha f$, $|\alpha| = i$, jest funkcją znikającą na S_i, więc

$$h(S_i \cap V) \subset \{0\} \times \mathbb{R}^{m-1}.$$

Niech g' będzie obcięciem g do $(\{0\} \times \mathbb{R}^{m-1}) \cap V'$,

$$g' : \underbrace{V' \cap (\{0\} \times \mathbb{R}^{m-1})}_{\substack{\wr\wr \\ \text{pewien zbiór otw. } \subset \mathbb{R}^{m-1}}} \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

(a) Z założenia indukcyjnego, zbiór wartości krytycznych g' ma miarę 0 w $\mathbb{R}^n$.

(b) Jeśli $p \in h(S_i \cap V)$, to $p \in \operatorname{Crit} g'$, bo w takich punktach pochodne g' do rzędu i znikają.

Zatem $g'(h(S_i \cap V)) = f(S_i \cap V)$ ma n-wymiarową miarę zero. Pokrywając $S_i \setminus S_{i+1}$ przeliczalnie wieloma takimi zbiorami V, kończymy dowód Lematu 2.

<u>Dowód lematu 3</u>. Pokrywamy S_k przeliczalnie wieloma kostkami o krawędzi δ $(\delta \ll 1)$. Niech Q – jedna z takich kostek, $Q \cap S_k \neq \emptyset$.

Wzór Taylora daje:

$$f(\bar{x}+h) = f(\bar{x}) + R(\bar{x},h) \qquad , \bar{x} \in Q \cap S_k \text{ ustalony,}$$

$h \in \mathbb{R}^m$ takie, że $\bar{x}+h \in Q$;

$\|R(\bar{x},h)\| \lesssim \|h\|^{k+1}$

Teraz dzielimy Q na N^m kostek o krawędzi δ/N każda, $Q = Q_1 \cup \ldots \cup Q_{N^m}$. Zostawmy te kostki Q_j, w których są punkty zbioru S_k.

$\bar{y} \in Q_j \cap S_k$, $\bar{y}+h \in Q_j \Rightarrow \|h\| \leq \sqrt{m}\,\frac{\delta}{N}$

$\Rightarrow f(Q_j)$ zawiera się w kostce o krawędzi $\leq \text{const} \cdot \left(\delta/N\right)^{k+1}$,

$\Rightarrow f(Q \cap S_k)$ zawiera się w sumie co najwyżej N^m kostek o krawędzi $\frac{\text{const} \cdot \delta^{k+1}}{N^{k+1}}$ każda,

$$\Rightarrow |f(Q \cap S_k)| \leq C N^{m-n(k+1)}, \quad C = C(\delta, m, n, k).$$

Ale: dla $k+1 > \frac{m}{n}$ mamy $m - n(k+1) < 0$, więc prawa strona $\to 0$ dla $N \to +\infty$.

Stąd: $f(Q \cap S_k)$ ma miarę zero, i łatwo teza Lem. 3 $\boxtimes$