Analiza matematyczna dla I roku informatyki. Pula jawnych zadań na kolokwia.

Wydział MIiM UW, 2018/19

31 maja 2019
ostatnie poprawki: 1 czerwca 2019

Szanowni Państwo,

na każdym kolokwium ponad połowa zadań będzie pochodzić z poniższej listy, lub będzie bardzo podobna do tych zadań.

Wśród zamieszczonych niżej zadań są łatwiejsze i trudniejsze. Proszę się nie zrażać, jeśli nie będą Państwo umieli zrobić wszystkich od razu.

1 Liczby rzeczywiste. Kresy zbiorów.

1. Udowodnić, że liczba $\sqrt{7+\sqrt{3}}$ jest niewymierna.

2. Rozstrzygnąć, czy liczba $\sqrt{\sqrt{5}+3}+\sqrt{\sqrt{5}-2}$ jest wymierna.
Wskazówka. Zbadać sumę i iloczyn liczb $\sqrt{\sqrt{5}+3} \pm \sqrt{\sqrt{5}-2}$.

3. Niech $A \subset \mathbb{R}$ będzie zbiorem ograniczonym i $\lambda \in \mathbb{R}$. Zbiór λA określamy wzorem

$$\lambda A := \{\lambda a\colon\ a \in A\}.$$

Oznaczmy $\sup A = M$ i $\inf A = m$. Wyznaczyć kresy zbioru λA.

4. Wyznaczyć kresy zbioru

$$\left\{\frac{(-1)^n - m}{n+m}\colon\ n, m \in \mathbb{N}\right\}.$$

5. Znaleźć kresy zbioru $\{\frac{2nm}{n^2+m^2} : n, m \in \mathbb{N}\}$.

6. Wyznaczyć kresy zbioru

- $A = \{k + \frac{1}{n} : k \in \{0, 1, 2\}, n \in \mathbb{N}\}$,

- $B = E + 2 \cdot E$, gdzie $E = \{1 + \frac{(-1)^n}{n^2} : n \in \mathbb{N}\}$,
- $C = \{\frac{n^2+2n-3}{n+1} : n \in \mathbb{N}\}$,
- $D = \{\frac{(n+m)^2}{2^{nm}} : n, m \in \mathbb{N}\}$.

7. Znaleźć kresy zbioru

(i) $\left\{\frac{1}{k} + \frac{1}{l} - \frac{1}{m} \colon k, l, m \in \mathbb{N}\right\}$,

(ii) $\left\{(1-4a)b^3 + a^2 \colon a, b \in (0,1)\right\}$.

8. Znaleźć kres dolny zbioru

$$A = \{\frac{1}{\sqrt[n]{m}} + \frac{1}{\sqrt[m]{n}} \colon \; m, n \in \mathbb{N}\}.$$

9. Wyznaczyć kresy zbioru

$$\left\{\frac{a_1}{a_2} + \frac{2a_2}{a_3} + \cdots + \frac{(n-1)a_{n-1}}{a_n} + \frac{na_n}{a_1} \; : \; a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n > 0\right\}.$$

2 Indukcja, nierówności.

10. Wykazać, że jeśli n jest liczbą naturalną parzystą, to liczba $n^3 + 20n$ dzieli się przez 48 $(= 3 \cdot 2^4)$.

11. Dany jest ciąg (a_n) taki, że $a_1 = 1$, $a_2 = 8$ oraz $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$ dla $n \geq 3$. Wykazać, że $a_n = 3 \cdot 2^{n-1} + 2 \cdot (-1)^n$ dla $n \in \mathbb{N}$.

12. Zaczynając od 0, dwóch graczy na przemian dodaje 1, 2 lub 3 do bieżącej wartości sumy. Wygrywa gracz, który pierwszy uzyska sumę co najmniej 1000. Udowodnić, że drugi gracz ma strategię wygrywającą, niezależnie od strategii gracza pierwszego.

13. Wykazać, że dla $n \in \mathbb{N}$

(i) $\frac{7^n-1}{6} \in \mathbb{N}$,

(ii) $\frac{n^3+5n}{6} \in \mathbb{N}$.

14. Udowodnić, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi nierówność

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n} \geq \frac{7}{12}.$$

15. Załóżmy, że (s_k) jest ciągiem liczb rzeczywistych nieujemnych, $s_1 \leq 1$, i dla każdego $k \geq 1$ spełniona jest nierówność

$$s_{k+1} \leq 2k + 3\sum_{j=1}^{k} s_j\,.$$

Wykazać, że $s_k < 7^k$ dla wszystkich k naturalnych.

Wskazówka. $2k < 1 + 2k \leq (1+2)^k$ na mocy nierówności Bernoulli'ego.

16. Udowodnić, że

$$\frac{1}{2n} < \sqrt[n]{2} - 1 \leq \frac{1}{n} \qquad \text{dla } n \geq 1.$$

17. Wykazać, że dla dowolnego $n \geq 1$ zachodzą nierówności

$$(n!)^2 \leq \left(\frac{(n+1)(2n+1)}{6} \right)^n ,$$

$$\frac{4^n}{2\cdot\sqrt{n}} \leq \binom{2n}{n}\,.$$

18. Udowodnić, że dla dostatecznie dużych naturalnych n zachodzi nierówność

$$\left(1 + \frac{5}{n}\right)^n < n.$$

3 Granica ciągu.

19. Obliczyć granice:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+\sqrt{n+1}} - \sqrt{n^2-\sqrt{n-1}}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}} ,$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n\cdot n!}{n^n} ,$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{6}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{\frac{n(n+1)}{2}}\right) ,$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^3-1}{2^3+1}\cdot\frac{3^3-1}{3^3+1}\cdot\ldots\cdot\frac{n^3-1}{n^3+1}\,.$$

20. Udowodnić, że istnieją takie ciągi liczb wymiernych (a_n) i (b_n), że

$$\lim_{n\to\infty} \left(a_n\sqrt{2} + b_n\sqrt{3}\right) = \sqrt{5}.$$

21. Obliczyć granicę

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n^2+2} + \frac{1}{n^2+4} + \ldots \frac{1}{n^2+2n} \right) n.$$

22. Sprawdzić, czy zbieżny jest ciąg $(a_n) \subset \mathbb{R}$ dany przez

$$a_1 = \alpha, \qquad a_{n+1} = 2 - \frac{3}{4a_n} \text{ dla } n \geq 2,$$

gdzie $\alpha \geq \frac{1}{2}$. W przypadkach, gdy ciąg jest zbieżny, znaleźć jego granicę.

23. Sprawdzić, czy zbieżny jest ciąg $(a_n) \subset \mathbb{R}$ dany wzorem

(i) $a_n = \dfrac{3^n - n!}{2^n}$,

(ii) $a_n = \dfrac{(2n)!}{n^{2n}}$.

Jeśli podany ciąg jest zbieżny, znaleźć jego granicę.

24. Wyznaczyć granice ciągów rekurencyjnych określonych wzorami

$$b_n = \sqrt{2 + b_{n-1}}, \qquad b_1 = \sqrt{2}\,,$$

$$c_n = \frac{1}{1 + c_{n-1}}, \qquad c_1 = 1.$$

25. Wykazać, że poniższe ciągi są zbieżne:

$$a_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}\ ,$$

$$b_n = \left(1 + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{4}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 + \frac{1}{2^n}\right).$$

26. Dany jest ciąg $(a_n)_{n \geq 1}$ taki, że $a_1 = a_2 = 1$ oraz $2a_{n+2} = 2a_{n+1} + a_n$ dla $n = 1, 2, 3 \ldots$. Wykazać, że

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{3}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)^n\right].$$

Obliczyć $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$.

27. Dany jest ciąg (a_n) taki, że $a_{n+1} = \sqrt{1 + a_n^2}$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Udowodnić, że ciąg (a_n) jest rozbieżny.

28. Dany jest ciąg (a_n) taki, że $a_1 = 1$ oraz $a_{n+1} = 1/(a_1 + \cdots + a_n)$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Udowodnić, że ciąg (a_n) jest zbieżny, a następnie znaleźć jego granicę.

29. Ciąg a_n jest dany przez równania rekurencyjne

$$a_1 = -2, \qquad a_{n+1} = \frac{2(2a_n + 1)}{a_n + 3} \quad \text{dla } n \in \mathbb{N}.$$

Zbadać, czy ten ciag ma granicę; jeśli tak – znaleźć ją.

4 Szeregi liczbowe i okolice

Uwaga: wszędzie w tym podrozdziale symbol $\lfloor x \rfloor$ oznacza część całkowitą (tzn. *entier*) liczby rzeczywistej x, inaczej *podłogę* x, a symbol $\lceil x \rceil$ – tzw. *sufit* liczby x, tzn. $\lceil x \rceil = \lfloor x \rfloor$ dla $x \in \mathbb{Z}$ oraz $\lceil x \rceil = \lfloor x \rfloor + 1$ dla $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

30. Zbadać zbieżność szeregów

$$\text{a)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n^{2n}}, \qquad \text{b)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}\,(\log_2 n)^4}, \qquad \text{c)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{2^n + 3^n}.$$

31. Zbadać zbieżność szeregów

$$\text{a)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}, \qquad \text{b)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^3}{(3n)!}, \qquad \text{c)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}.$$

32. Niech $(a_n) \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$ będzie ciągiem arytmetycznym. Zbadać zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n \cdot a_{n+1}}.$$

33. Dany jest ciąg (a_n) taki, że $0 < a_n \leq a_{2n} + a_{2n+1}$ dla $n \geq 1$. Wykazać, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny.

34. Udowodnić, że jeśli ciąg liczb dodatnich (a_n) jest ograniczony, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} 1/(na_n)$ jest rozbieżny.

35. Zbadać zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n} + \sqrt{n-1})$. Jeśli jest on zbieżny, wyznaczyć jego sumę.

36. Zbadać zbieżność szeregów

$$\text{a)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln n^{\ln n}} \qquad \text{b)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} 2^{(1-\sqrt[n]{2})}$$

37. Zbadać zbieżność szeregu

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln \ln n)^{\ln n}}.$$

38. Znaleźć wszystkie wartości parametru $a \in \mathbb{R}$, dla których szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} a^{\varepsilon_n}, \qquad \text{gdzie} \quad \varepsilon_n = \frac{1}{\sqrt[n]{2} - 1},$$

jest zbieżny.

Wskazówka: dla każdego ciągu $(x_n) \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$ jest

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\exp(x_n) - 1}{x_n} = 1.$$

39. Znaleźć wszystkie wartości parametru $p \in \mathbb{R}$, dla których szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n!}\right)^p$$

jest zbieżny.

40. Niech $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ będzie dowolnym szeregiem zbieżnym o wyrazach dodatnich. Czy szeregi:

$$\text{a)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[4]{a_n^5}, \qquad \text{b)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin a_n$$

są zbieżne? Uzasadnić odpowiedź, podając dowód lub kontrprzykład.

41. Wykazać, że jeżeli $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ jest zbieżny, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n/n$ również jest zbieżny.

42. Niech $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ będzie dowolnym szeregiem zbieżnym o wyrazach dodatnich. Czy szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{a_n}}{\ln n}(n^{a_n} - 1)$$

jest zbieżny? Uzasadnić odpowiedź.

43. Dowieść, że jeżeli (a_n) jest ciągiem liczb dodatnich, to szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)}$$

jest zbieżny. Znaleźć jego sumę w przypadku, gdy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest szeregiem rozbieżnym.

44. Zbadać zbieżność szeregu

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln^5(2n^7+13) + 10\sin(n)}{n\ln^6(n^{\frac{7}{8}} + 2\sqrt{n} - 1)\ln(\ln(n+(-1)^n))}.$$

45. Zbadać zbieżność szeregu

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{\lceil 1+\sin^2 n^5 \rceil} \left(\frac{n^2+3n+10}{n^2+5n+17}\right)^{n^2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1})}.$$

46. Zbadać zbieżność szeregu

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(\cos\sqrt[3]{n^3+\sqrt{n}+7} - \cos\sqrt[3]{n^3-2\sqrt{n}+3}\right).$$

47. Zbadać zbieżność szeregu

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\exp n}{\exp(n\sqrt[n]{n}) \ln^2 n}.$$

48. Obliczyć sumę

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+1)^2}{n!}.$$

49. Zbadać zbieżność szeregu

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(n+1)!(n+1)^{n-1}}{n^{2n}}.$$

50. Zbadać zbieżność szeregu

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{\left\lfloor \frac{n^3+n+1}{3n^2-1} \right\rfloor} \frac{\ln n}{n}.$$

51. Niech

$$S_k := \sum_{n=2}^{k} (-1)^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor} \frac{1}{\ln n}.$$

Czy ciąg $S_{(2k)^2}$ jest zbieżny? Czy ciąg S_k jest zbieżny? Obie odpowiedzi proszę uzasadnić.

52. Zbadać zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$, gdzie

$$a_n = (-1)^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor} \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

53. Dany jest ciąg (a_n) o wyrazach zespolonych taki, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny. Niech $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ będzie taką bijekcją, że dla każdego $n \in N$ zachodzi nierówność $|\sigma(n) - n| \leq 13$. Wykazać, że wówczas szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$$

jest zbieżny.

54. Wykazać, że jeżeli szereg $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ jest zbieżny i ciąg wartości bezwzględnych wyrazów szeregu, $(|a_n|)$, jest monotoniczny, to szereg

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^3$$

jest zbieżny. Czy założenie o monotoniczności $(|a_n|)$ jest niezbędne?

55. Zbadać zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n^2+7}-\sqrt[3]{n^3+8n+1}\right)(\ln(n+1)-\ln n).$$

56. Zbadać zbieżność szeregu

$$\sum_{n=13}^{\infty}(-1)^{\lfloor \frac{n}{13}\rfloor}\frac{\ln n}{n\ln(\ln n)}.$$

57. Korzystając ze wzoru De Moivre'a i równości $\sin kx=\operatorname{Im}e^{ikx}$, udowodnić, że

$$\sum_{k=1}^{n}\sin(kx)=\frac{\sin\frac{nx}{2}\sin\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}},\qquad x\in(0,2\pi).$$

Znaleźć analogiczny wzór na sumę cosinusów.

58. Czy szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n^2}{\sqrt{n+1}}\sin\frac{(2n+1)\pi}{2}$$

jest zbieżny? Uzasadnić odpowiedź.

59. Dany jest zbieżny szereg $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$. Czy wynika stąd, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty}a_n/\sqrt{n}$ jest a) zbieżny, b) bezwzględnie zbieżny? Odpowiedź uzasadnić, podając dowód lub kontrprzykład.

60. Szereg $\sum_{n=1}^{\infty}(-i)^n a_n$, gdzie $a_n>0$ jest zbieżny. Czy jest zbieżny szereg $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$? Odpowiedź uzasadnić, podając dowód lub kontrprzykład.

61. Zbadać zbieżność szeregów

a) $\frac{1}{1}+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{6}+\ldots$

b) $\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{6}}-\frac{1}{\sqrt{7}}-\frac{1}{\sqrt{8}}+\ldots$

c) $\frac{1}{1}-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{6}+\frac{1}{3}-\frac{1}{8}-\frac{1}{10}-\frac{1}{12}+\frac{1}{5}-\frac{1}{14}-\frac{1}{16}-\frac{1}{18}+\ldots$

62. Wykazać, że iloczyn Cauchy'ego szeregów

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt[4]{n^3}}\qquad\text{i}\qquad\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt[4]{n}}$$

jest rozbieżny. Czy odpowiedź zmieni się, gdy pierwszy szereg szereg zamienimy na $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n^{-5/4}$?

63. Wykazać tożsamość

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{(n^3-n)3^n} = -\frac{1}{2} + \frac{4}{3}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 3^n}.$$

64. Zbadać zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n+(-1)^{n+1}}.$$

65. Zbadać zbieżność szeregu

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}+(-1)^{n(n+1)/2}}.$$

66. Udowodnić tożsamość

$$\cos\frac{2\pi}{5} + \cos\frac{4\pi}{5} + \cos\frac{6\pi}{5} + \cos\frac{8\pi}{5} = -1.$$

67. Udowodnić, że liczby zespolone $z, w \in \mathbb{C}$ są równe wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi następujący warunek:

($*$) $\exp z = \exp w$ i dla pewnego $\alpha \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ spełniona jest równość $\exp(\alpha \cdot z) = \exp(\alpha \cdot w)$.

68. Wykazać, że dla każdego $w \in \mathbb{C}$ istnieje $z \in \mathbb{C}$ takie, że $\sin z = w$.

69. Dla $\varepsilon > 0$ połóżmy

$$S_\varepsilon := \{z = x + iy \in \mathbb{C} \colon \varepsilon y > |x|,\ |z| < \varepsilon\} \subset \mathbb{C}.$$

Niech $f(z) = \exp(1/z)$ dla $z \neq 0$. Wykazać, że $f \colon S_\varepsilon \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ jest surjekcją.

70. Posługując się tylko definicją liczby π z wykładu i szeregiem definiującym funkcję cosinus, wykazać, że

a) $\pi > 2\sqrt{2}$,

b) $\pi > 3$.

71. Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach rzeczywistych jest zbieżny. Udowodnić, że istnieje ciąg nieograniczony $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ liczb dodatnich taki, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ też jest zbieżny.

72 ($*$)**.** Niech $a_n \geq 0$. Wykazać, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_1 \cdot \ldots \cdot a_n)^{1/n} \leq e \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

5 Granica funkcji, ciągłość, wypukłość

73. Wyznaczyć granicę

a) $\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}$,

b) $\lim_{x\to 0^{+}}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}$,

c) $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}}\right)^{\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}}$.

74. Udowodnij, że funkcja $f(x)=\lim_{n\to\infty}\left((\sin^{2n}x+\cos^{2n}x)\right)^{1/n}$ jest ciągła.

75. Funkcja f jest ciągła na $(-1,1]$. Dla $x\in(-1,1]$ określamy

$$g(x)=\lim_{n\to\infty}f(x^{n}).$$

Udowodnić, że g jest funkcją ciągłą wtedy i tylko wtedy, gdy $f(0)=f(1)$.

76. Wyznaczyć zbiór granic ciągów postaci $(f(x_n))$, gdzie $(x_n)\subset\mathbb{R}$, $\lim_{n\to+\infty}x_n=+\infty$ oraz

a) $f(x)=x\sin x$,

b) $x-\sqrt{\lfloor x^{2}\rfloor}$,

c) $x-\left(\lfloor\sqrt{x}\rfloor\right)^{2}$.

77. Funkcja ciągła $f\colon R\to(-2019,+\infty)$ spełnia warunek $\lim_{x\to+\infty}f(x)=-2019$. Wykazać, że f ma punkt stały: istnieje $a\in\mathbb{R}$ taki, że $f(a)=a$.

Czy teza jest prawdziwa dla funkcji ciągłych $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ takich, że $\lim_{x\to+\infty}f(x)=-2019$?

78. Niech $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ będzie ciągła i okresowa. Wykazać, że dla każdego $a\in\mathbb{R}$ istnieje nieskończenie wiele takich $c\in\mathbb{R}$, że $f(a+c)=f(c)$.

79. Załóżmy, że $f:[1,\infty)\mapsto\mathbb{R}$ jest ciągła i nie jest ograniczona ani z góry, ani z dołu. Wykazać, że f przyjmuje każdą wartość rzeczywistą nieskończenie wiele razy.

80. Udowodnić, że jeśli funkcja $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ jest ciągła i ma ciąg okresów $T_n\neq0$ taki, że $\lim_{n\to\infty}T_n=0$, to f jest stała.

81. Załóżmy, że funkcja $f:[0,1]\mapsto\mathbb{R}$ jest ciągła. Niech $g:[0,1]\mapsto\mathbb{R}$ będzie określona wzorem $g(x)=\sup\{f(t):0\le t\le x\}$. Wykazać, że $g(x)$ jest ciągła i niemalejąca.

82. Wyznaczyć stałe rzeczywiste a, c tak, by funkcja

$$f(x) = \begin{cases} a \cdot \exp(\operatorname{tg} x)/\big(1 + \exp(\operatorname{tg} x)\big) & \text{dla } |x| < \pi/2, \\ \exp(c \cdot x) - 2 & \text{dla } |x| \geq \pi/2 \end{cases}$$

była ciągła na prostej $\mathbb{R}$.

83. Niech

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$$

i niech $g(x) = x^2$ dla $x \in \mathbb{R}$. Zbadać ciągłość funkcji $f \circ g$ oraz $g \circ f$ na całej prostej rzeczywistej.

84. Wskazać przykład funkcji, która ma własność Darboux, ale jest nie jest ciągła.

85. Funkcja f jest ciągła na przedziale $[1/(2\sqrt{2}), 2\sqrt{2}]$ i spełnia warunek

$$f(2\sqrt{2}) - f\big(1/(2\sqrt{2})\big) = 3.$$

Wykazać, że dla pewnej liczby x zachodzi równość $f(2x) - f(x) = 1$.

86. Funkcja f jest ciągła na $[0, 1]$ i spełnia zależność

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x + 1/3) + f(x + 2/3)}{x} = 1.$$

Udowodnić, że istnieje punkt $x_0 \in [0, 1]$ taki, że $f(x_0) = 0$.

87. Udowodnić, że jeśli $f : I \to \mathbb{R}$ jest funkcją wypukłą i $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest niemalejącą funkcją wypukłą to złożenie $h(x) = g(f(x))$ jest funkcją wypukłą. Czy założenie monotoniczności g jest istotne?

88. Znaleźć najmniejsze pole siedmiokąta opisanego na kole o promieniu 1.

89. Niech $x_1, \ldots, x_n \in (0, \pi)$ oraz $x = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k$. Wykazać, że wówczas

$$\prod_{k=1}^{n} \sin x_k \leq \big(\sin x \big)^n.$$

90. Niech $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie funkcją wypukłą. Wykazać, że dla każdego $t \in \mathbb{R}$ takiego, że $\inf f < t < \sup f$ zbiór $f^{-1}(t)$ zawiera jeden lub dwa punkty.

91. Wyznaczyć wszystkie funkcje $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ ciągłe w zerze oraz takie, że $2f(2x) = f(x) + x$ dla $x \in \mathbb{R}$.

92. Niech $[x]$ oznacza część całkowitą liczby x. Obliczyć granicę

$$\lim_{x \to 0} x \left[\frac{1}{x} \right].$$

93. Wykazać, że

$$\lim_{n \to \infty} \Big(\lim_{k \to \infty} \big(\cos(|n! \pi x|)\big)^{2k} \Big) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}; \\ 0, & x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

6 Pochodna: definicja i najprostsze własności

94. Znaleźć pochodną (w tych punktach, w których istnieje) funkcji $f(x) = [x]\sin^2(\pi x)$, $x \in \mathbb{R}$, gdzie $[x]$ oznacza część całkowitą liczby x.

95. Obliczyć pochodną funkcji $f\colon (0, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$, gdzie

a) $f(x) = \sin(x^{\cos x})$,

b) $f(x) = (\sin x)^{\cos x}$,

c) $f(x) = \log_{\sin x}(\cos x)$.

96. Niech $\lambda > 0$. Położmy

$$f(x) = \begin{cases} |x|^\lambda \sin \dfrac{1}{x} & x \neq 0; \\ 0, & x = 0\,. \end{cases}$$

Dla jakich λ funkcja f (a) jest różniczkowalna w zerze? (b) ma pochodną ciągłą w zerze?

97. Znaleźć wszystkie pary liczb rzeczywistych a, b, dla których funkcja

$$f(x) = \begin{cases} a(x+1) + \sin(bx), & x \geq 0, \\ \dfrac{-1 + \cos x}{x \sin x}, & x \in (-\pi, 0) \end{cases}$$

jest różniczkowalna w zerze.

98. Czy funkcja

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-1}{x} \exp(-1/|x|) & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

jest w punkcie $x_0 = 0$ ciagła? różniczkowalna? Odpowiedzi proszę uzasadnić.

99. Podać przykład $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ograniczonej i różniczkowalnej, takiej, że f' jest nieograniczona na $\mathbb{R}$.

100. Podać przykład $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nieograniczonej i różniczkowalnej, takiej, że f' jest ograniczona na $\mathbb{R}$.

7 Rachunek różniczkowy cd.

101. Dana jest różniczkowalna funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ taka że $f'(x) > f(x)$ dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$, oraz $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$. Udowodnić, że równanie $f(x) = 0$ ma co najwyżej jeden pierwiastek rzeczywisty.

102. Rozważmy funkcję $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ daną wzorem $f(x) = 3^x + 4^x - 5^x$. Udowodnić, że równanie $f(x) = 0$ ma tylko jeden pierwiastek rzeczywisty.

103. Znaleźć liczbę rozwiązań równania $x = \ln(|a - x|)$ w zależności od parametru $a \in \mathbb{R}$.

104. Udowodnić, że $\ln(1 + x) < x(1 + x)^{-1/2}$ oraz $e^x < 1 + xe^x$ dla wszystkich $x > 0$.

105. Obliczyć granicę

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 + 2x + x\sin(x) - x^2\cos(x) - \exp(x)^2}{\sqrt{1 + x^2} - \exp(x^2)}$$

106. Wyznaczyć poniższe granice lub wykazać, że nie istnieją:

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\exp(\exp(x)) - \exp(x + 1)}{x^2}$,

(b) $\lim\limits_{x\to 0^+} (x^{x-1} - x^{-1})^{-1}$,

(c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1 - \cos(\sin x)}}{\sin x}$.

107. Obliczyć granicę

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{\operatorname{arc\,tg} x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}.$$

108. Obliczyć granicę

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{\operatorname{tg} x} - e^x}{\operatorname{tg} x - x}.$$

109. Niech

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}} & \text{dla } x > 0, \\ 1 & \text{dla } x = 0. \end{cases}$$

Udowodnić, że f ma w zerze pochodne prawostronne wszystkich rzędów i obliczyć $f_+^{(3)}(0)$.

110. Wykazać, że dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$ zachodzi nierówność

$$\operatorname{arc\,tg}(x + 1) - \operatorname{arc\,tg}(x - 1) \leq \frac{\pi}{2}.$$

111. Wyznaczyć minima i maksima lokalne oraz znaleźć kresy funkcji $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ danej wzorem

$$f(x) = \sqrt{1 - e^{-x^2}} + e^{-x^2/2}.$$

112. Znaleźć minimum objętości stożków opisanych na kuli o promieniu r.

113 (trudniejsze). Dla $n \in \mathbb{N}$ niech $a_1, \ldots, a_n$ oraz $b_1, \ldots, b_n$ będą liczbami dodatnimi. Wykazać, że funkcja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dana wzorem

$$f(x) = a_1 \cos(b_1 x) + \ldots + a_n \cos(b_n x)$$

ma miejsce zerowe.

114. Niech $g\colon [0,3] \to \mathbb{R}$ będzie różniczkowalna i niech $g(0) = 1$, $g(1) = 2 = g(3)$. Wykazać, że

(a) istnieje $\xi \in [0,3]$ takie, że $g(\xi) = \xi$,

(b) istnieje $\xi \in [0,3]$ takie, że $g'(\xi) = 1/3$,

(c) istnieje $\xi \in [0,3]$ takie, że $g'(\xi) = 1/e$.

115. Niech $g\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ będzie dwukrotnie różniczkowalna i niech $g''(x) > 0$ dla wszystkich $x \in [0,1]$, $g(0) > 0$ oraz $g(1) = 1$. Uzasadnić, że punkt $x_0 \in (0,1)$ spełniający $g(x_0) = x_0$ istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy $g'(1) > 1$.

116. Wykazać, że dla $|x| < 1$ błąd przybliżenia

$$\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$$

nie przekracza $\frac{1}{720}$.

117. Niech $f(x) = 2 - 2\cos x - x \cdot \sin(\sin x)$ i niech $a_n = f(\frac{1}{n})$ dla $n \in \mathbb{N}$. Wyznaczyć wszystkie wykładniki $w > 0$, dla których szereg $\sum a_n^w$ jest zbieżny.

118. Udowodnić, że dla wszystkich $x > 0$ spełniona jest nierówność

$$\ln(1+x) > \frac{\operatorname{arc\,tg} x}{1+x}.$$

119. Wykazać, że dla $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ zachodzi nierówność

$$\frac{2\ln(\cos x)}{x^2} < \frac{x^2}{12} - 1\,.$$

120. Wyznaczyć wszystkie pary liczb $a, b \in \mathbb{R}$, dla których granica

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - (a + b\cos x)\sin x}{x^5}$$

jest skończona.

121. Obliczyć granicę

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x \sin x \operatorname{tg}(x \sin x)} - \frac{1}{x^2 \sin^2 x} \right).$$

122. Funkcja $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ (szereg ma promień zbieżności $R > 0$) spełnia w przedziale $(-R, R)$ równanie

$$f'(x) = x^2 f(x)$$

i ponadto $f(0) = \pi$. Wyznaczyć a_6.

123. Wyznaczyć promienie zbieżności następujących szeregów potęgowych:

a) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot 3^{n^2} \cdot 4^{n^3}}{n + n^2 + n^3} x^{2n^3},$$

b) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3 + (-1)^n 2)^{2n}}{n} x^{2n+(-1)^n},$$

c) $$\sum_{n=1}^{\infty} (5n + (-1)^n)^n x^{2n},$$

d) $$\sum_{n=1}^{\infty} 8^n \sqrt{n} x^{n+1}.$$

124. Szereg potęgowy $\sum_{n=3}^{\infty} a_n x^n$ ma skończony promień zbieżności $R > 0$. Proszę wyznaczyć promień zbieżności szeregu $\sum_{n=3}^{\infty} a_n x^{n^2}$.

125. Wykazać, że funkcja

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{nx^n}{n+1}, \qquad x \in (-1, 1)$$

spełnia tożsamość

$$xf(x) = \frac{x}{1-x} + \ln(1-x), \qquad x \in (-1, 1).$$

Wskazówka. $n/(n+1) = 1 - \frac{1}{n+1}$.

8 Zbieżność jednostajna

126. Zbadać zbieżność (punktową, niemal jednostajną, jednostajną) szeregów funkcyjnych na zadanych przedziałach:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} x^n e^{-xn}, \quad x \in \mathbb{R}$,

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^2}{n^3+x^3}, \quad x > 0$.

Uwaga: Mówi się, że szereg funkcyjny $\sum f_n(x)$ jest *niemal jednostajnie zbieżny* na zbiorze $A \subset \mathbb{R}$ wtedy i tylko wtedy, gdy jest jednostajnie zbieżny na każdym przedziale domkniętym $[a, b] \subset A$.

127. Udowodnić, że wzór

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^n} \cos nx$$

definiuje funkcję różniczkowalną na przedziale $(-2, 2)$. Obliczyć jej pochodną w zerze.

128. Zbadać ciągłość i różniczkowalność funkcji f, gdy

(a) $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+x^2}, \quad x \in \mathbb{R}$,

(b) $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2-x^2}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

129. Wykazać, że szereg funkcyjny

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{nx}(1 - e^{-\frac{x}{n}}), \qquad x \in (0, +\infty)$$

jest zbieżny jednostajnie. Czy suma tego szeregu jest funkcją różniczkowalną?

130. Zbadać zbieżność punktową, jednostajną i niemal jednostajną ciągu funkcji $f_n \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ danych wzorem

$$f_n(x) = nxe^{-(nx-1)^2}.$$

131. Zbadać zbieżność punktową, jednostajną i niemal jednostajną na $\mathbb{R}$ szeregu funkcyjnego

$$\sum_{n=1}^{+\infty} xe^{-(nx-1)^2}.$$

9 Rachunek całkowy i okolice

132. Niech

$$f(x) = \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{-x-1}{x^2-4}\right) - \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{x+1}{x^2-4}\right))$$

Wykazać, że f jest różniczkowalna na $\mathbb{R} \setminus \{2, -2\}$ i $f'(x) = \frac{x^2+2x+4}{x^4-7x^2+2x+17}$. Obliczyć całkę

$$\int_1^3 \frac{x^2+2x+4}{x^4-7x^2+2x+17} dx\,.$$

133. Zbadać zbieżność całek niewłaściwych

1. $\int_1^{\infty} x^{-3} \cos x dx$,

2. $\int_0^1 \cos \frac{1}{\sqrt{x}} dx$.

134. Obliczyć granice:

$$\lim_{n\to\infty} n^3 \int_n^{n+1} \frac{x}{2x^4+1} dx \,,$$
$$\lim_{n\to\infty} \int_{-1}^{1} x^5 \arctan(nx) dx \,.$$

135. Obliczyć granice:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k+n}{3k^2+n^2} \,,$$
$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1+n}{3k^2+n^2} \,,$$
$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k+n}{3k^2+n^2+1} \,.$$

136. Niech $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie dowolną dodatnią funkcją ciągłą. Obliczyć

$$\int_0^1 \frac{f(x)}{f(x)+f(1-x)} \, dx.$$

137. Obliczyć

$$\int_0^\pi \frac{x \sin x}{1+(\cos x)^2} \, dx.$$

138. Wykazać, że dla wszystkich $n, m \in \mathbb{N}$

$$\int_0^1 \sqrt[m]{1-x^n} \, dx = \int_0^1 \sqrt[n]{1-x^m} \, dx.$$

139. Udowodnić nierówności

$$\frac{3\pi}{8} < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(\sin x) dx < \frac{49\pi}{128}.$$

140. Obliczyć

$$\lim_{x\to 0+} \frac{1}{x \sin x} \int_0^{x^2} (1+\sin t)^{1/t} \, dt.$$

141. Zbadać zbieżność całki

$$\int_0^\pi \frac{dx}{\left|\sin x\right|^{1/2}}.$$

142. Wykazać, że każda funkcja $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ ograniczona i ciągła wszędzie poza skończoną liczbą punktów $x_1, \ldots, x_N \in (a,b)$ jest całkowalna w sensie Riemanna.

143. Wykazać, że jeśli f jest ograniczona i całkowalna w sensie Riemanna na przedziale $[a, b]$, to f^2 także ma tę własność.

144. Wykazać, że ciąg liczbowy

$$a_n = n - \frac{1}{2^n} \sum_{k=1}^{2^n} \log_2(k + 2^n)$$

jest zbieżny i obliczyć jego granicę.

145. Obliczyć granicę

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n!}}.$$

146. Zbadać zbieżność całek niewłaściwych

$$\int_0^1 \sin(\ln x) dx \quad \text{oraz} \quad \int_1^\infty \sin(\ln x) dx.$$

Jeżeli któraś z powyższych całek jest zbieżna, znaleźć jej wartość.

147. Obliczyć całki

$$\text{(a)} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x \, dx, \qquad \text{(b)} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x}{1+\cos x} dx, \qquad \text{(c)} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\sin^3 x}{1+\cos x} dx.$$

10 Rachunek różniczkowy dla funkcji wielu zmiennych

148. Zbadać ciągłość w punkcie $(x_1, x_2) = (0, 0)$ funkcji $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ danej wzorem

$$\text{(a)} \ f(x_1, x_2) = \begin{cases} \dfrac{\sin x_1 \cos x_2}{\sin^2 x_1 + \cos^2 x_2} & \text{dla } (x_1, x_2) \neq (0,0), \\ 0 & \text{dla } (x_1, x_2) = (0,0), \end{cases}$$

$$\text{(b)} \ f(x_1, x_2) = \begin{cases} \sin \dfrac{x_1}{x_2} - \sin \dfrac{x_2}{x_1} & \text{jeśli } x_1 \neq 0,\ x_2 \neq 0, \\ 0 & \text{w przeciwnym razie.} \end{cases}$$

149. Zbadać ciągłość i różniczkowalność funkcji

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2 + y^2} & \text{dla } (x, y) \neq (0,0), \\ 0 \quad \text{w p.p.} \end{cases}$$

Wskazówka: zbadać pochodne kierunkowe f w zerze.

150 (*Metryka szkółki leśnej*). Funkcja d_l na $\mathbb{R}^2$ jest zdefiniowana wzorem

$$\mathrm{d}_l((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = \begin{cases} |x_2 - y_2| & \text{jeśli } x_1 = y_1, \\ |x_2| + |x_1 - y_1| + |y_2| & \text{w przeciwnym razie.} \end{cases}$$

Sprawdzić, że to jest metryka. Niech $B_l(p_0, r)$ oznacza kulę względem metryki szkółki leśnej d_l o środku w $p_0 \in \mathbb{R}^2$ i promieniu $r > 0$. Narysować

(a) $B_l((0,0),1)$,

(b) $B_l((1,1),2)$.

151. Niech $\mathbf{1}_{\mathbb{Q}}$ oznacza funkcję Dirichleta. Zbadać ciągłość względem metryki szkółki leśnej z Zadania 150 funkcji $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ danej wzorem

(a) $f(x_1,x_2) = x_2$,

(b) $f(x_1,x_2) = \mathbf{1}_{\mathbb{Q}}(x_1)$,

(c) $f(x_1,x_2) = x_2\mathbf{1}_{\mathbb{Q}}(x_1)$.

152. Podać przykład funkcji $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, która ma pochodne cząstkowe w każdym punkcie płaszczyzny, ale $\lim_{t\to 0} f(t,t^2) = \infty$.

10.1 Zadania do treningu przed egzaminem

153. Niech

$$f(x,y) = x^2 \sin(y/x)\cos(1/x^2)\ln(1+y), \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad x \neq 0.$$

Proszę dookreślić wartość f w $(0,0)$ tak, aby w tym punkcie istniała pochodna kierunkowa f względem wektora $(1,1)$. Obliczyć tę pochodną.

154. Czy funkcja

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x^4+y^4)}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

jest różniczkowalna w $(0,0)$? Proszę uzasadnić odpowiedź.

155. Niech f będzie funkcją określoną na $\mathbb{R}^3$ wzorem

$$f(x,y,z) = \begin{cases} x + y - z^2 & \text{gdy } z \in \mathbb{Q}, \\ x + y + z^4 & \text{gdy } z \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Udowodnić, że f ma w punkcie $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^3$ różniczkę $Df(\boldsymbol{a})$ wtedy i tylko wtedy, gdy f jest ciągła w $\boldsymbol{a}$.

156. Wyznaczyć zbiór wszystkich punktów (x, y) płaszczyzny $\mathbb{R}^2$, w których funkcja

$$f(x, y) = |e^x - e^y| \cdot (x + y - 2)$$

jest różniczkowalna.

157. Funkcja $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ jest różniczkowalna. Obliczyć pochodną funkcji jednej zmiennej

$$F(t) = \big(f(t, t^2, \ldots, t^n)\big)^2, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

158. Niech $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ będzie dana wzorem

$$f(x, y) = -3x^4 - y^2 + 4yx^2.$$

Wykazać, że dla każdego wektora $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2)$ długości 1 funkcja

$$h_{\boldsymbol{v}}(t) = f(tv_1, tv_2)$$

ma maksimum lokalne w punkcie $t = 0$. Czy można stąd wnioskować, że f ma maksimum lokalne w $(0, 0)$? Odpowiedź proszę uzasadnić.

Wskazówka. Narysować poziomice funkcji f, tj. linie $\{f = \text{const}\}$.

159. Niech

$$f_\alpha(x, y) = \begin{cases} \big(x^2 + y^2\big)^\alpha \sin\big(1/\sqrt{x^2 + y^2}\big), & (x, y) \neq 0, \\ 0, & (x, y) = 0. \end{cases}$$

(a) Wykazać, że $f_{1/2}$ jest ciągła w $(0, 0)$, ale nie jest różniczkowalna w $(0, 0)$.

(b) Wykazać, że f_1 jest różniczkowalna na $\mathbb{R}^2$, ale nie jest klasy C^1.

(c) Wykazać, że $f_{3/2}$ jest klasy C^1 na całej płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$

160. Wyznaczyć wszystkie wartości $p, q > 0$, dla których funkcja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dana wzorem

$$f(\boldsymbol{x}) = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/q}$$

jest różniczkowalna w $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$.

161. Obliczyć kres górny funkcji f na zbiorze A:

$$f(x, y) = \frac{x \ln(1 + y)}{2x^2 + y^2}, \qquad A = \{(x, y)\colon\ 0 < x \le y \le 1\}.$$

Odpowiedź starannie uzasadnić.

162. Obliczyć kres górny funkcji f na zbiorze A:

$$f(x,y) = x(y-x-1)e^{-y}, \qquad A = \{(x,y)\colon \ 0 \le x \le y\}.$$

163. Funkcja f jest określona na zbiorze $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\colon \ xy > -1\}$ wzorem

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{1+xy}-1}{y} & \text{dla } y \neq 0, \\ x/2 & \text{dla } y = 0. \end{cases}$$

(a Wykazać różniczkowalność f w $(0,0)$. Czy Df jest ciągła w tym punkcie?

(b Czy funkcja f jest różniczkowalna w punkcie $(1,0)$?

Odpowiedzi proszę uzasadnić.

Wskazówka: Jedna z dróg polega na tym, by spróbować zapisać f jako iloczyn $x\varphi(xy)$, gdzie φ jest funkcją jednej zmiennej określoną na odpowiednim podzbiorze prostej.

164. Dana jest funkcja $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$ taka, że

$$\lim_{(x,y)\to 0} \frac{f(x,y) - \operatorname{tg}(x)\sin(y)}{x^2+y^2} = 0.$$

Obliczyć pochodną mieszaną

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0).$$

165. Niech $f(x,y) = (x^3 - x - y)(2x - y - 2)$ dla $x, y \in \mathbb{R}$.

(a) Wyznaczyć wszystkie punkty krytyczne funkcji f.

(b) Dla każdego z tych punktów rozpoznać, czy f ma w tym punkcie lokalne ekstremum.

166. Niech $f(x,y) = x^3y - 3x^2y + y^2$ dla $x, y \in \mathbb{R}$.

(a) Wyznaczyć wszystkie punkty krytyczne funkcji f.

(b) Dla każdego z tych punktów rozpoznać, czy f ma w tym punkcie lokalne ekstremum.

167. Niech $f(x,y,z) = x^4 + y^4 - 2x^2(1-y^2) + z^2$ dla $x, y, z \in \mathbb{R}$.

(a) Wyznaczyć wszystkie punkty krytyczne funkcji f.

(b) Dla każdego z tych punktów rozpoznać, czy f ma w tym punkcie lokalne ekstremum.

Twierdzenie o lokalnej odwracalności, twierdzenie o funkcji uwikłanej

168. Rozważamy odwzorowanie $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dane wzorami

$$F(x,y) = (u,v), \qquad \text{gdzie} \quad u = 4xy - 2x^2, \quad v = 2x^2 + xy - y^2.$$

Punktem lokalnej odwracalności F będziemy nazywać każdy punkt (x_0, y_0) taki, że odwzorowanie F, zawężone do pewnego otoczenia punktu (x_0, y_0), przekształca to otoczenie bijektywnie na pewne otoczenie punktu $(u_0, v_0) = F(x_0, y_0)$.

(a) Wyznaczyć wszystkie punkty lokalnej odwracalności odwzorowania F.

(b) Jednym z takich punktów jest $(1, 1)$; zatem w pewnym otoczeniu punktu $F(1, 1) = (2, 2)$ jest określone odwzorowanie odwrotne $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$. Obliczyć $\dfrac{\partial y}{\partial u}(2, 2)$.

169. (a) Dowieść, że równanie $x \ln w + w \ln y = 0$ wyznacza w otoczeniu punktu $(1, 1, 1)$ zmienną w jako funkcję pozostałych zmiennych: $w = g(x, y)$.

(b) Wyznaczyć pochodne cząstkowe pierwszego rzędu funkcji g w w punkcie $(1, 1)$.

170. (a) Dowieść, że równanie $xe^z = y(z + x)$ wyznacza zmienną z jako funkcję $z = g(x, y)$ w otoczeniu punktu $(x_0, y_0, z_0) = (2, 1, 0)$.

(b) Wyznaczyć pochodne cząstkowe pierwszego rzędu funkcji g w punkcie $(2, 1)$.

Mnożniki Lagrange'a

171 (*Dla treningu teorii, raz jeszcze przykład z wykładu 30 maja*). Znaleźć wszystkie ekstrema lokalne związane funkcji $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ na powierzchni

$$\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon F(x, y, z) = 0\},$$

gdzie

$$F(x, y, z) = \frac{x^4}{3^4} + \frac{y^4}{2^4} + z^4 - 1 .$$

172. Wyznaczyć kres górny i dolny funkcji $g(x, y, z) = xyz$ na zbiorze

$$\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon F(x, y, z) = 0\},$$

gdzie $F \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $F(x, y, z) = x^2 + y^4 + z^8 - 14$.

173. Wyznaczyć kres górny i dolny funkcji $g(x, y, z) = x^3 \cdot \operatorname{arc\,tg} y$ na zbiorze

$$\Sigma = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon F(x, y, z) = 0 \in \mathbb{R}^2\right\},$$

gdzie $F = (F_1, F_2) \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ określona jest wzorami

$$F_1(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 5, \qquad F_2(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 6.$$

11 Miara i całka Lebesgue'a

174. Niech A będzie zbiorem tych liczb z przedziału $[0, 1]$, które mają rozwinięcie dwójkowe postaci $0, c_1 c_2 c_3 \ldots$ (cyfry $c_i \in \{0, 1\}$), spełniające warunek: $c_{i-1} c_{i+1} = 0$ dla i parzystych. Dowieść, że A jest zbiorem miary zero.

175. Dany jest zbiór $A \subset \mathbb{R}^3$, dodatniej miary Lebesgue'a. Wykazać, że w zbiorze A istnieje punkt, leżący w odległości niewymiernej od każdego punktu przestrzeni $\mathbb{R}^3$, mającego wszystkie współrzędne wymierne.

176. Obliczyć

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \frac{n\sin(x/n)}{x(1+x^2)}\,dx\,.$$

177. Obliczyć

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \frac{x^n+2}{x^n+1}\,e^{-x}dx.$$

178. Funkcje $f_n\colon [0,1] \to [0,+\infty)$, gdzie $n \in \mathbb{N}$, są ciągłe. Dla każdego $x \in [0,1]$ ciąg liczbowy $f_n(x)$ jest zbieżny. Które z poniższych zdań jest prawdziwe, a które fałszywe?

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \int_{[0,1]} f_n\,dx = \int_{[0,1]} \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n\right) dx.$

(b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]} f_n\,dx = \int_{[0,1]} \left(\lim_{n\to\infty} f_n\right) dx.$

(c) Jeśli $\displaystyle\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ dla każdego $x \in [0,1]$, to $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]} f_n\,dx = 0.$

Odpowiedzi proszę uzasadnić.

179. Rozważmy funkcje zmiennej $t > 0$, określone wzorami

$$f(t) = \left(\int_0^{\sqrt{t}} e^{-x^2}\,dx\right)^2 \qquad \text{oraz} \qquad g(t) = \int_0^1 \frac{e^{-t(1+x^2)}}{1+x^2}\,dx.$$

(a) Wykazać, że f, g są różniczkowalne i $f'(t) + g'(t) = 0$ dla wszystkich $t > 0$.

(b) Wykazać, że $f(t) + g(t) = \pi/4$ dla wszystkich $t > 0$.

(c) Wywnioskować stąd, że $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Proszę starannie uzasadnić wszystkie obliczenia.

180. Wykazać, że dla $a, b > -1$ funkcja

$$f(x,y) = \frac{x^a y^b}{1-xy}, \qquad x, y \in (0,1)\times(0,1)\,,$$

jest całkowalna na $(0,1)\times(0,1)$ względem miary Lebesgue'a λ_2 i spełniona jest równość

$$\iint_{(0,1)\times(0,1)} f(x,y)\,d\lambda_2(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(a+n+1)(b+n+1)}\,.$$