

**Uniwersytet Warszawski**  
Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki

**Paweł Parys**

Nr albumu: 209216

# **Funkcje różniczkowalne posiadające duże zbiory wartości krytycznych**

Praca licencjacka  
na kierunku **MATEMATYKA**  
w zakresie **ANALIZY MATEMATYCZNEJ**

Praca wykonana pod kierunkiem  
**dra hab. Pawła Strzeleckiego**  
Instytut Matematyki

Kwiecień 2005

## **Oświadczenie kierującego pracą**

Potwierdzam, że niniejsza praca została przygotowana pod moim kierunkiem i kwalifikuje się do przedstawienia jej w postępowaniu o nadanie tytułu zawodowego.

Data

Podpis kierującego pracą

## **Oświadczenie autora (autorów) pracy**

Świadom odpowiedzialności prawnej oświadczam, że niniejsza praca dyplomowa została napisana przeze mnie samodzielnie i nie zawiera treści uzyskanych w sposób niezgodny z obowiązującymi przepisami.

Oświadczam również, że przedstawiona praca nie była wcześniej przedmiotem procedur związanych z uzyskaniem tytułu zawodowego w wyższej uczelni.

Oświadczam ponadto, że niniejsza wersja pracy jest identyczna z załączoną wersją elektroniczną.

Data

Podpis autora (autorów) pracy

## **Streszczenie**

W pracy tej przedstawiłem dwa przykłady funkcji, których zbiory wartości krytycznych mają miarę dodatnią. Pierwszą konstrukcję przeprowadzam wprost, posługując się zbiorem Cantora. Drugi przykład korzysta z twierdzenia Whitneya o przedłużaniu funkcji różniczkowalnych; ma on tę dodatkową własność, że na pewnej krzywej pochodna jest wszędzie równa zero, a funkcja nie jest stała.

## **Słowa kluczowe**

twierdzenie Sarada, przykład Whitneya, twierdzenie Whitneya, wartości krytyczne

## **Dziedzina pracy (kody wg programu Socrates-Erasmus)**

11.1 Matematyka

## **Klasyfikacja tematyczna**

26. Real functions

26B. Functions of several variables

26B05. Continuity and differentiation questions

## **Tytuł pracy w języku angielskim:**

Differentiable functions with large sets of critical values



# Spis treści

<b>Wprowadzenie</b> . . . . .	5
<b>1. Funkcja posiadająca zbiór wartości krytycznych miary dodatniej</b> . . . . .	7
1.1. Zbiór wartości krytycznych będący zbiorem Cantora . . . . .	7
1.2. Zbiór wartości krytycznych miary dodatniej . . . . .	11
<b>2. Twierdzenie Whitneya o rozszerzaniu funkcji różniczkowalnych</b> . . . . .	13
2.1. Różniczkowalność na zbiorach niekoniecznie otwartych . . . . .	13
2.2. Twierdzenie Whitneya . . . . .	15
<b>3. Funkcja niestała na spójnym zbiorze punktów krytycznych</b> . . . . .	17
3.1. Krzywa . . . . .	17
3.2. Funkcja . . . . .	19
<b>Bibliografia</b> . . . . .	21



# Wprowadzenie

**Definicja 0.1** Niech  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$  klasy  $\mathbf{C}^1$ . Powiemy, że punkt  $x \in \mathbb{R}^n$  jest **punktem krytycznym** funkcji  $f$ , jeśli pochodna (macierz pochodnych cząstkowych) nie jest maksymalnego rzędu. Powiemy, że  $y \in \mathbb{R}^k$  jest **wartością krytyczną**, jeśli dla pewnego punktu krytycznego  $x \in \mathbb{R}^n$  zachodzi  $f(x) = y$ .

W okolicy punktu krytycznego funkcja jest prawie płaska, zatem naturalne wydaje się oczekiwanie, że zbiór wartości krytycznych będzie mały. Oczekiwanie to precyzuje następujące twierdzenie:

**Twierdzenie 0.2 (Sard)** Niech  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$  klasy  $\mathbf{C}^m$ , gdzie  $m \geq \max\{n - k + 1, 1\}$ . Wówczas zbiór wartości krytycznych ma zerową miarę Lebesgue'a w  $\mathbb{R}^k$ .

Twierdzenie to zostało udowodnione dla przypadku  $m = 1$  przez Morse'a [Morse39] w 1939 roku, natomiast w ogólnym przypadku przed Sarda [Sard42] w 1942 roku.

W niniejszej pracy pokażę przykłady, które mówią o optymalności założeń powyższego twierdzenia. W rozdziale 1 skonstruuję funkcję z  $\mathbb{R}^2$  w  $\mathbb{R}$  klasy  $\mathbf{C}^1$ , której zbiór wartości krytycznej jest odcinkiem. W rozdziale 2 opowiem o twierdzeniu Whitneya pozwalającym na rozszerzanie funkcji różniczkowalnych określonych na zbiorze zwartym na całą przestrzeń. Z tego twierdzenia skorzystam w rozdziale 3, w którym przedstawię słynny przykład Whitneya funkcji również z  $\mathbb{R}^2$  w  $\mathbb{R}$  klasy  $\mathbf{C}^1$ , która na pewnej spójnej krzywej punktów krytycznych nie jest stała.





# Rozdział 1

## Funkcja posiadająca zbiór wartości krytycznych miary dodatniej

Zasadniczą częścią tego rozdziału będzie dowód następującego twierdzenia:

**Twierdzenie 1.1** *Istnieje funkcja  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  klasy  $\mathbf{C}^1$ , której zbiór wartości krytycznych jest odcinkiem (czyli ma miarę dodatnią).*

Twierdzenie to zaprzecza tezie twierdzenia Sarda w przypadku  $n = 2, k = 1, m = 1$  (czyli gdy założenie  $m \geq \max\{n - k + 1, 1\}$  nie jest spełnione).

Najpierw znajdem funkcję z  $\mathbb{R}$  w  $\mathbb{R}$ , której zbiorem wartości krytycznych jest zbiór Cantora. Następnie za jej pomocą już łatwo skonstruujemy funkcję  $f$  potrzebną w twierdzeniu 1.1.

### 1.1. Zbiór wartości krytycznych będący zbiorem Cantora

Przypomnę najpierw czym jest zbiór Cantora. Otrzymujemy go z odcinka  $[0, 1]$  usuwając środkowy fragment długości  $\frac{1}{3}$ , czyli  $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ , następnie z pozostałych części usuwamy środkowe fragmenty długości  $\frac{1}{9}$ , itd. w nieskończoność. Formalnie zbiór ten najprościej zdefiniować za pomocą zapisu liczby w systemie trójkowym: zbiór Cantora jest zbiorem tych liczb z  $[0, 1]$ , które w pewnym<sup>1</sup> zapisie w systemie trójkowym nie zawierają jedynek. Zbiór ten będę oznaczał przez  $C$ .

Celem niniejszego rozdziału jest uzyskanie następującego lematu:

**Lemat 1.2** *Istnieje funkcja  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  klasy  $\mathbf{C}^1$ , której zbiorem wartości krytycznych jest  $C$ .*

Oprócz tego, że funkcja ta będzie potrzebna do konstrukcji funkcji  $f$  z twierdzenia 1.1, to jej istnienie jest samo w sobie ciekawe.

Można sprawdzić, że miara Lebesgue'a zbioru  $C$  wynosi 0. Zresztą musi tak być, inaczej powyższy lemat przeczyłby twierdzeniu Sarda.

Zamiast konstruować bezpośrednio funkcję  $g$ , skonstruujemy jej pochodną, którą następnie odcałkujemy.

**Lemat 1.3** *Istnieje funkcja ciągła  $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  taka, że:*

1. Dla każdego  $x \in \mathbb{R}$  całka  $\int_{-\infty}^x h(s) ds$  istnieje i jest skończona.

---

<sup>1</sup>Jak wiadomo niektóre liczby mają dwa różne zapisy w systemie trójkowym. Konkretnie są to wielokrotności potęg trójki.

2. Dla każdego  $x \in \mathbb{R}$  takiego, że  $h(x) = 0$  zachodzi

$$\int_{-\infty}^x h(s) ds \in C$$

3. Dla każdego  $y \in C$  istnieje  $x \in \mathbb{R}$  taki, że  $h(x) = 0$  oraz

$$y = \int_{-\infty}^x h(s) ds$$

**Dowód** Ustalmy dowolnie  $a \in (\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$ , na przykład  $a = \frac{2}{5}$ .

Zdefiniujemy najpierw skalowania:

$$\begin{aligned} R_0(x) &\stackrel{\text{def}}{=} ax \\ R_1(x) &\stackrel{\text{def}}{=} 1 - a + ax \end{aligned}$$

Są to funkcje różnowartościowe, które przekształcają odcinek  $(0, 1)$  na odcinki odpowiednio  $(0, a)$  i  $(1 - a, 1)$ .

Funkcję  $h$  określimy następująco:

$$h(x) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} d_n(s) & \text{jeśli } x = R_{b_1} \circ \dots \circ R_{b_n}(s) \text{ dla } n \geq 0, b_i \in \{0, 1\}, s \in (a, 1 - a) \\ 0 & \text{wpp.} \end{cases}$$

gdzie

$$d_n(s) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{4}{3(1 - 2a)^2} \left(\frac{1}{3a}\right)^n \min\{s - a, 1 - a - s\}$$

Trzeba sprawdzić poprawność powyższej definicji, czyli że przedziały  $R_{b_1} \circ \dots \circ R_{b_n}((a, 1 - a))$  są rozłączne dla różnych  $(b_1, \dots, b_n)$ . Przypuśćmy przeciwnie, że takie przedziały odpowiadające dwóm różnym ciągom  $(b_1, \dots, b_n)$  i  $(b'_1, \dots, b'_{n'})$  przecinają się. Niech  $j$  będzie pierwszą pozycją, na której ciągi te się różnią, tzn.  $b_j \neq b'_j$  lub  $\min\{n, n'\} + 1 = j \leq \max\{n, n'\}$ . Z monotoniczności skalowań  $R_0$  i  $R_1$  wynika, że wówczas

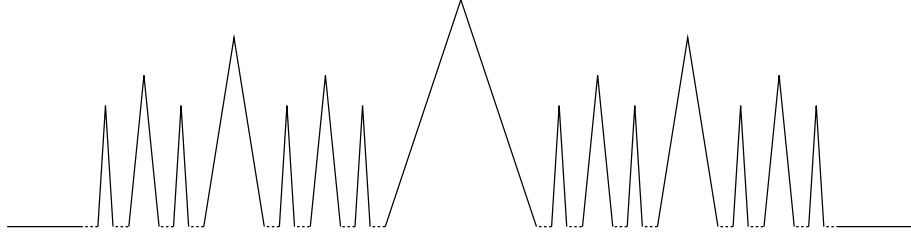
$$R_{b_j} \circ \dots \circ R_{b_n}((a, 1 - a)) \cap R_{b'_j} \circ \dots \circ R_{b'_{n'}}((a, 1 - a)) \neq \emptyset$$

Następnie stosując wielokrotnie fakt  $R_i((0, 1)) \subset (0, 1)$  (gdzie  $i = 0$  lub  $1$ ) dostajemy jeden z następujących przypadków:

1.  $R_0((0, 1)) \cap R_1((0, 1)) \neq \emptyset$
2.  $R_i((0, 1)) \cap (a, 1 - a) \neq \emptyset$  dla  $i = 0$  lub  $1$

Z definicji skalowań  $R_0, R_1$  widzimy jasno, że tak być nie może, co dowodzi poprawności definicji  $h$ .

Warto w tym miejscu przyjrzeć się jak właściwie wygląda nasza funkcja. Dla argumentów ujemnych i większych od 1 pierwszy przypadek nigdy nie zajdzie, więc wartością jest 0. Na środkowym fragmencie szerokości  $1 - 2a$ , czyli odcinku  $(a, 1 - a)$ , ustawiamy daszek  $d_0$ . Pozostają dwie części:  $(0, a)$  oraz  $(1 - a, 1)$ , na które właśnie jest przekształcany odcinek  $(0, 1)$  przy skalowaniach  $R_0$  i  $R_1$ . Na środkowych fragmentach tych części, zajmujących  $1 - 2a$  ich szerokości stawiamy daszki  $d_1$ . Z pozostałymi częściami, teraz czterema, postępujemy tak samo, stawiając na coraz to mniejszych fragmentach daszki  $d_2, d_3$ , itd. Funkcję tę przedstawia rysunek 1.1.



Rysunek 1.1: Szkic funkcji  $h$

Sprawdźmy teraz ciągłość funkcji  $h$ . Wynika ona stąd, że daszki  $d_n$  dla coraz to większych  $n$  są coraz niższe, a to dlatego, że  $a > \frac{1}{3}$ . Dokładniej jest tak: ciągłość w punkcie należącym do któregoś z przedziałów  $R_{b_1} \circ \dots \circ R_{b_n}((a, 1-a))$  wynika bezpośrednio z ciągłości funkcji  $d_n$ . Niech więc  $x_0$  nie należy do żadnego z tych przedziałów i niech  $\varepsilon > 0$ . Wtedy  $h(x_0) = 0$  oraz tylko skończenie wiele spośród daszek  $d_n$  przyjmuje w swojej środkowej części wartości  $\geq \varepsilon$ . Konkretnie, ponieważ  $\min\{s-a, 1-a-s\} \leq \frac{1}{2}-a$ , jest tak tylko jeśli  $\frac{4}{3(1-2a)^2} \left(\frac{1}{3a}\right)^n \left(\frac{1}{2}-a\right) \geq \varepsilon$ , co wobec  $a > \frac{1}{3}$  daje górne ograniczenie na  $n$ . Zatem zbiór  $\{x \in \mathbb{R} | f(x) \geq \varepsilon\}$ , jako suma skończenie wielu przedziałów domkniętych, jest domknięty. Odległość punktu  $x_0$  od tego zbioru jest więc dodatnia, czyli wobec dowolności  $\varepsilon$  funkcja  $h$  jest ciągła w  $x_0$ .

Pozostaje sprawdzić własności 1, 2 i 3. Dla wygody dla dowolnych  $b_1, \dots, b_n \in \{0, 1\}$ ,  $n \geq 0$  oznaczmy

$$\beta_{(b_1, \dots, b_n)}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 0 & \text{jeśli } x < R_{b_1} \circ \dots \circ R_{b_n} \left(\frac{1}{2}\right) \\ 1 & \text{wpp.} \end{cases}$$

$$C_{(b_1, \dots, b_n)} \stackrel{\text{def}}{=} \int_{R_{b_1} \circ \dots \circ R_{b_n}(a)}^{R_{b_1} \circ \dots \circ R_{b_n}(1-a)} h(x) dx$$

Policzmy teraz tę całkę

$$\begin{aligned} C_{(b_1, \dots, b_n)} &= \int_a^{1-a} h(R_{b_1} \circ \dots \circ R_{b_n}(s)) a^n ds = \int_a^{1-a} d_n(s) a^n ds = \\ &= \int_a^{1-a} \frac{4}{3(1-2a)^2} \left(\frac{1}{3a}\right)^n \min\{s-a, 1-a-s\} a^n ds = \\ &= \frac{4}{3(1-2a)^2} \left(\frac{1}{3}\right)^n \left( \int_a^{\frac{1}{2}} (s-a) ds + \int_{\frac{1}{2}}^{1-a} (1-a-s) ds \right) = \\ &= \frac{4}{3(1-2a)^2} \left(\frac{1}{3}\right)^n 2 \int_0^{\frac{1}{2}-a} s ds = \\ &= \frac{4}{3(1-2a)^2} \left(\frac{1}{3}\right)^n 2 \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}-a\right)^2 = \frac{1}{3^{n+1}} \end{aligned} \tag{1.1}$$

Dla ustalonych  $b_1, \dots, b_k \in \{0, 1\}$ ,  $k \geq 0$  zachodzi

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{b_{k+1}, \dots, b_n \in \{0, 1\} \\ n \geq k}} C_{(b_1, \dots, b_k, b_{k+1}, \dots, b_n)} &= \sum_{\substack{b_{k+1}, \dots, b_n \in \{0, 1\} \\ n \geq k}} \frac{1}{3^{n+1}} = \sum_{n \geq k} \frac{2^{n-k}}{3^{n+1}} \\ &= \frac{1}{3^{k+1}} \sum_{n \geq 0} \left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{1}{3^{k+1}} \frac{1}{1-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3^k} \end{aligned} \tag{1.2}$$

Punkt 1 jest już teraz oczywisty, bo funkcja jest nieujemna oraz równa zero poza przedziałem  $[0, 1]$ , a zgodnie z 1.2 całka po  $[0, 1]$  wynosi 1.

Przeprowadzę teraz dowód punktu 2. Niech  $x_0 \in \mathbb{R}$  taki, że  $h(x_0) = 0$ . Określmy indukcyjnie ciąg  $c_1, c_2, \dots$  w następujący sposób (dla  $n \geq 0$ ):

$$c_{n+1} \stackrel{\text{def}}{=} \beta_{(c_1, \dots, c_n)}(x_0) \quad (1.3)$$

Zauważmy, że  $C_{(b_1, \dots, b_n)} \beta_{(b_1, \dots, b_n)}(x_0)$  jest to równe 0, jeśli odcinek  $R_{b_1} \circ \dots \circ R_{b_n}((a, 1-a))$  znajduje się na prawo od  $x_0$ , natomiast całce z  $h$  po tym odcinku, jeśli na lewo. Zatem

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{x_0} h(x) dx &= \sum_{\substack{b_1, \dots, b_n \\ n \geq 0}} C'_{(b_1, \dots, b_n)} = \sum_{k \geq 0} \left( C_{(c_1, \dots, c_k)} \beta_{(c_1, \dots, c_k)} + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{\substack{b_{k+2}, \dots, b_n \in \{0,1\} \\ n \geq k+1}} C_{(c_1, \dots, c_k, 1-c_{k+1}, b_{k+2}, \dots, b_n)} \beta_{(c_1, \dots, c_k, 1-c_{k+1}, b_{k+2}, \dots, b_n)} \right) \end{aligned}$$

Zauważmy teraz, że  $c_{k+1} = \beta_{(c_1, \dots, c_k)}(x_0) = \beta_{(c_1, \dots, c_k, 1-c_{k+1}, b_{k+2}, \dots, b_n)}(x_0)$ . Pierwsza równość zachodzi z definicji, a jeśli  $c_{k+1} = 0$ , to

$$x_0 < R_{c_1} \circ \dots \circ R_{c_k} \left( \frac{1}{2} \right) < R_{c_1} \circ \dots \circ R_{c_k} \circ R_1 \circ R_{b_{k+2}} \circ \dots \circ R_{b_n} \left( \frac{1}{2} \right)$$

Jeśli zaś  $c_{k+1} = 1$ , to dokładnie odwrotnie. Przekształcając dalej powyższą sumę dostajemy (korzystając z obliczeń 1.1 i 1.2)

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{x_0} h(x) dx &= \sum_{k \geq 0} c_{k+1} \left( C_{(c_1, \dots, c_k)} + \sum_{\substack{b_{k+2}, \dots, b_n \in \{0,1\} \\ n \geq k+1}} C_{(c_1, \dots, c_k, 1-c_{k+1}, b_{k+2}, \dots, b_n)} \right) = \\ &= \sum_{k \geq 0} c_{k+1} \left( \frac{1}{3^{k+1}} + \frac{1}{3^{k+1}} \right) = \sum_{k \geq 1} \frac{2c_k}{3^k} \end{aligned}$$

Ta liczba należy do przedziału  $[0, 1]$  i ma w zapis trójkowy  $(2c_1, 2c_2, \dots)_3$  zawierający same zera i dwójki, więc należy do zbioru Cantora, co kończy dowód punktu 2.

Aby udowodnić punkt 3 weźmy  $y \in C$  mający zapis w systemie trójkowym  $(2c_1, 2c_2, \dots)_3$ . Rozważmy przecięcie

$$\bigcap_{n \geq 0} R_{c_1} \circ \dots \circ R_{c_n}([0, 1])$$

Jest ono jednopunktowe, gdyż przecinamy zstępujący ciąg odcinków domkniętych o promieniach dążących do zera — stosujemy twierdzenie Cantora. Niech  $x_0$  będzie jedynym punktem należącym do tego przecięcia. Widzimy, że jeśli któryś  $c_{k+1} = 0$ , to odcinek  $R_{c_1} \circ \dots \circ R_{c_{k+1}}([0, 1])$  (czyli także punkt  $x_0$ ) leży na lewo od punktu  $R_{c_1} \circ \dots \circ R_{c_k} \left( \frac{1}{2} \right)$ , a jeśli  $c_{k+1} = 1$ , to na prawo. Zatem określony w 1.3 ciąg  $c_1, c_2, \dots$  jest równy naszemu ciągowi. Możemy więc skorzystać z obliczeń przeprowadzonych przy dowodzie punktu 2, aby stwierdzić, że

$$\int_{-\infty}^{x_0} h(x) dx = \sum_{k \geq 1} \frac{2c_k}{3^k} = y$$

Ponadto  $h(x_0) = 0$ , bo jeśli tak nie jest, to  $x_0$  należy do pewnego odcinka  $R_{c_1} \circ \dots \circ R_{c_k} \circ R_{1-c_{k+1}} \circ R_{b_{k+2}} \circ \dots \circ R_{b_n}((a, 1-a))$  (dla  $n > k \geq 0$ ,  $b_{k+2}, \dots, b_n \in \{0, 1\}$ ) lub  $R_{c_1} \circ \dots \circ R_{c_k}((a, 1-a))$  (dla  $k \geq 0$ ), co jednak jawnie przeczy temu, że  $x \in R_{c_1} \circ \dots \circ R_{c_k} \circ R_{c_{k+1}}([0, 1])$ . Zatem wskazany  $x_0$  spełnia tezę warunku 3. ■

**Dowód lematu 1.2** Niech

$$g(x) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^x h(s) ds$$

gdzie  $h$  jest funkcją spełniającą tezę lematu 1.3.

Ponieważ  $h$  była ciągła, to z zasadniczego twierdzenia analizy<sup>2</sup> wynika, że pochodna funkcji  $g$  istnieje i jest równa  $h$ . W szczególności  $g$  jest klasy  $\mathbf{C}^1$ .

Z punktu 2 lematu 1.3 wiemy, że jeśli  $g'(x) = 0$  to  $g(x) \in C$ , natomiast z punktu 3, że dla każdego  $y \in C$  istnieje  $x \in g^{-1}(y)$  taki, że  $g'(x) = 0$ . To dowodzi, że zbiorem wartości krytycznych funkcji  $g$  jest  $C$ . ■

**Uwaga 1.4** Zauważmy, że funkcja  $g$  nie może zostać łatwo poprawiona do funkcji klasy  $\mathbf{C}^2$ . Tak by się stało, gdyby funkcja  $h$  była klasy  $\mathbf{C}^1$ . Mogłoby się wydawać, że wystarczy „wygładzić” daszki  $d_n$ . Tak jednak nie jest, można sprawdzić, że pozostanie problem z różniczkowalnością w punktach, wokół których dowolnie blisko znajduje się nieskończenie wiele daszków. Proszszym argumentem jest jednak to, że funkcja klasy  $\mathbf{C}^1$  ma pochodną ograniczoną, natomiast nachylenie daszka  $d_n$  jest proporcjonalne do  $\left(\frac{1}{3a^2}\right)^n$ , co jest dowolnie duże (bo  $a < \frac{1}{2}$ , czyli  $3a^2 < 1$ ).

## 1.2. Zbiór wartości krytycznych miary dodatniej

**Definicja 1.5** Dla dowolnych dwóch zbiorów  $A, B \subset \mathbb{R}$  określamy

$$A + B \stackrel{\text{def}}{=} \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$$

**Lemat 1.6**  $C + C = [0, 2]$

**Dowód** Oznaczmy zbiór  $\{\frac{c}{2} \mid c \in C\}$  jako  $\frac{C}{2}$ . Zbiór Cantora jest zbiorem tych liczb z  $[0, 1]$ , które w pewnym zapisie w systemie trójkowym zawierają same zera i dwójki. Zatem  $\frac{C}{2}$  jest zbiorem tych liczb z  $[0, \frac{1}{2}]$ , które w pewnym zapisie w systemie trójkowym zawierają same zera i jedynki.

Udowodniemy fakt równoważny tezie lematu:

$$\frac{C}{2} + \frac{C}{2} = [0, 1]$$

Zawieranie się lewej strony w prawej jest oczywiste (bo  $C \subset [0, 1]$ ). Dla dowodu zawierania przeciwnego rozważmy dowolną liczbę  $x \in [0, 1]$  posiadającą zapis w systemie trójkowym  $x = (0, x_1 x_2 x_3 \dots)_3$ . Określmy liczby  $y = (0, y_1 y_2 y_3 \dots)_3$  oraz  $z = (0, z_1 z_2 z_3 \dots)_3$  przyjmując dla każdego  $i$

$$(y_i, z_i) = \begin{cases} (0, 0) & \text{jeśli } x_i = 0 \\ (0, 1) & \text{jeśli } x_i = 1 \\ (1, 1) & \text{jeśli } x_i = 2 \end{cases}$$

Wówczas  $y, z \in C$  oraz  $y + z = x$ , co kończy dowód. ■

Jesteśmy już gotowi do dowodu zasadniczego wyniku tego rozdziału.

**Dowód twierdzenia 1.1** Weźmy

$$f(x, y) = g(x) + g(y)$$

---

<sup>2</sup>Jego sformułowanie i dowód znajdują się na przykład w [Rudin], str. 114

gdzie  $g$  jest funkcją z lematu 1.2. Ponieważ  $g$  było klasy  $\mathbf{C}^1$ , to  $f$  także jest. Weźmy dowolne  $u \in [0, 2]$ . Wówczas, z lematu 1.6 istnieją  $z, t \in C$  takie, że  $z+t = u$ . Ponadto istnieją  $x, y \in \mathbb{R}$  — punkty krytyczne funkcji  $g$  takie, że  $g(x) = z$  oraz  $g(y) = t$ , czyli  $f(x, y) = g(x) + g(y) = u$ . Wtedy jednak  $(x, y)$  jest punktem krytycznym funkcji  $f$  (czyli  $u$  wartością krytyczną), bo pochodna  $f$  po pierwszej zmiennej jest równa pochodnej  $g$  w punkcie  $x$ , a po drugiej zmiennej w punkcie  $y$ . Zatem zbiór wartości krytycznych zawiera  $[0, 2]$ . Jeśli dodatkowo zajrzemy do konstrukcji funkcji  $g$  widzimy, że  $f$  nie przyjmuje żadnych innych wartości, czyli zbiorem wartości krytycznych jest dokładnie  $[0, 2]$ . ■

**Uwaga 1.7** Ponieważ funkcja  $g$  nie była klasy  $\mathbf{C}^2$ , to także  $f$  nie jest klasy  $\mathbf{C}^2$ , co zresztą przeczyłoby twierdzeniu Sarda.

## Rozdział 2

# Twierdzenie Whitneya o rozszerzaniu funkcji różniczkowalnych

W rozdziale tym przedstawię (bez dowodu) twierdzenie Whitneya, które umożliwia rozszerzanie funkcji różniczkowalnych określonych na zbiorze zwartym na całą przestrzeń. W tym celu trzeba najpierw odpowiednio zdefiniować bycie różniczkowalnym dla funkcji określonych na zbiorach innych niż otwarte.

Twierdzenie to zostanie użyte w rozdziale 3 do konstrukcji funkcji, która nie jest stała na spójnym zbiorze punktów krytycznych.

### 2.1. Różniczkowalność na zbiorach niekoniecznie otwartych

W rozdziale tym będziemy rozważać funkcje z podzbiorów  $\mathbb{R}^n$  w  $\mathbb{R}$ , gdzie  $n$  jest ustalone. Jeśli  $U$  jest podzbiorem otwartym  $\mathbb{R}^n$ , to przez  $\mathbf{C}^m(U)$  oznaczmy zbiór funkcji klasy  $\mathbf{C}^m$  z  $U$  w  $\mathbb{R}$ .

Literkami  $k$  i  $l$  będziemy oznaczać wielowskaźniki długości  $n$ , czyli ciągi  $k = (k_1, \dots, k_n)$ , gdzie  $k_1, \dots, k_n$  są liczbami całkowitymi nieujemnymi. Zdefiniujemy też sobie pewne podstawowe operacje na takich wielowskaźnikach, których będziemy używać. Normą wielowskaźnika będziemy nazywać

$$|k| \stackrel{\text{def}}{=} k_1 + \dots + k_n$$

Silnię liczymy w następujący sposób:

$$k! \stackrel{\text{def}}{=} k_1! \cdot \dots \cdot k_n!$$

Dla wektora  $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$  możemy określić potęgowanie jako

$$v^k \stackrel{\text{def}}{=} v_1^{k_1} \cdot \dots \cdot v_n^{k_n} \in \mathbb{R}$$

Ponadto określamy operator różniczkowania z  $\mathbf{C}^m(U)$  po wielowskaźniku (gdzie  $|k| \leq m$ ) — różniczkujemy  $k_i$  razy po  $i$ -tej zmiennej:

$$D^k \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial^{|k|}}{\partial x_1^{k_1} \cdot \dots \cdot \partial x_n^{k_n}}$$

Niech  $U$  będzie zbiorem otwartym w  $\mathbb{R}^n$  oraz niech  $f \in \mathbf{C}^m(U)$ . Będziemy rozważać wszystkie możliwe pochodne tej funkcji. W tym celu określimy ciąg

$$\nabla^m f \stackrel{\text{def}}{=} \left( D^k f \right)_{|k| \leq m}$$

Pochodne te istnieją i są ciągłe. Oznaczmy sobie element  $\nabla^m f$  o indeksie  $k$  jako  $f^{(k)}$ .

**Przykład 2.1** Niech  $f \in \mathbf{C}^2(\mathbb{R}^3)$ . Wówczas

$$\nabla^2 f = \left( f, \frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_3}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2} \right)$$

Przypomnijmy, że wielomian Taylora rzędu  $m$  dla funkcji  $f \in \mathbf{C}^m(U)$  w  $a \in U$  to

$$T_a^m(f)(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{|k| \leq m} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)$$

Wiadomo, że<sup>1</sup>

$$|f(x) - T_a^m f(x)| = o(|x-a|^m) \quad \text{przy } x \rightarrow a$$

Przykładając operator  $l$ -krotnego różniczkowania  $D^l$  ( $l$  — wielowskaźnik,  $|l| \leq m$ ) otrzymujemy dodatkowo, że

$$(D^l T_a^m f)(x) = \sum_{\substack{|k| \leq m \\ l \leq k}} \frac{(x-a)^{k-l}}{(k-l)!} f^{(k)}(a) = \sum_{|k| \leq m-|l|} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(l+k)}(a) = T_a^{m-|l|} f^{(l)}(x)$$

czyli (przy  $x \rightarrow a$ )

$$\left| f^{(l)}(x) - (D^l T_a^m f)(x) \right| = \left| f^{(l)}(x) - T_a^{m-|l|} f^{(l)}(x) \right| = o(|x-a|^{m-|l|})$$

Spróbujemy teraz odwrócić powyższe rozważania, zapominając, że  $\nabla^m f$  powstał poprzez różniczkowanie funkcji  $f$ .

**Definicja 2.2** Niech  $A \subset \mathbb{R}^n$  będzie dowolnym zbiorem. Przestrzeń dżetów Whitneya na  $A$ , oznaczaną  $\mathbf{J}^m(A)$ , nazwiemy zbiór, którego elementami są ciągi funkcji ciągłych indeksowanych wielowskaźnikami  $k$  długości  $n$ , gdzie  $|k| \leq m$ :

$$F = \left( f^{(k)} \right)_{|k| \leq m}$$

W naturalny sposób definiujemy wielomian Taylora dla  $F \in \mathbf{J}^m(A)$ :

$$T_a^m F(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{|k| \leq m} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)$$

Powiedzmy, że mamy  $F \in \mathbf{J}^m(U)$ . Interesujące jest pytanie kiedy istnieje funkcja  $f \in \mathbf{C}^m(U)$  taka, że  $F = \nabla^m f$ . Mówi o tym następujący lemat:

<sup>1</sup>Jest to dowiedzione na przykład w [Maurin], str. 83



**Lemat 2.3** Załóżmy, że  $F = \left(f^{(k)}\right)_{|k| \leq m} \in \mathbf{J}^m(U)$  oraz spełniony jest warunek:

$$\forall l \forall a \quad \left| f^{(l)}(x) - (D^l T_a^m F)(x) \right| = o\left(|x - a|^{m-|l|}\right) \quad \text{przy } x \rightarrow a \quad (2.1)$$

Wówczas  $f^{(0)} \in \mathbf{C}^m(U)$  i  $F = \nabla^m f^{(0)}$

**Dowód** Chcemy udowodnić, że  $f^{(l)} = D^l f^{(0)}$  (przy  $|l| \leq m$ ). Będzie to indukcja po  $|l|$ . Dla  $l = 0$  teza jest oczywista. Oznaczmy wielowskaźnik mający na  $i$ -tej współrzędnej jedynkę, a poza tym zera, przez  $e_i$ . Aby pokazać krok indukcyjny wystarczy dla  $|l| \leq m - 1$  pokazać, że

$$f^{(l+e_i)} = \frac{\partial}{\partial x_i} f^{(l)} \quad (2.2)$$

Z założenia indukcyjnego wiemy bowiem, że  $f^{(l)} = D^l f^{(0)}$ , co wobec 2.2 daje tezę:  $f^{(l+e_i)} = D^{l+e_i} f^{(0)}$ , a każdy niezerowy wielowskaźnik o normie nie większej niż  $m$  przedstawia się w postaci  $l + e_i$  dla  $|l| \leq m$ .

Aby dowieść 2.2 skorzystamy z warunku 2.1 dla naszego  $l$ , następnie rozpiszemy  $D^l T_a^m F$  do pierwszego wyrazu (w tym miejscu nie korzystamy z założenia indukcyjnego, a jedynie różniczkujemy wielomian):

$$\begin{aligned} o(|x - a|) &= \left| f^{(l)}(x) - (D^l T_a^m F)(x) \right| = \\ &= \left| f^{(l)}(x) - f^{(l)}(a) - \sum_{j=1}^n (x_j - a_j) f^{(l+e_j)}(a) + o(|x - a|) \right| \end{aligned}$$

Biorąc teraz  $x = a + te_i$  dostajemy

$$\left| f^{(l)}(a + te_i) - f^{(l)}(a) - t f^{(l+e_i)}(a) \right| = o(|x - a|)$$

To samo, z  $\frac{\partial}{\partial x_i} f^{(l)}$  w miejscu  $f^{(l+e_i)}$ , mówi nam definicja pochodnej, w dodatku pochodna jest wyznaczona jednoznacznie, a zatem zachodzi 2.2.

Dodatkowo, aby  $f^{(0)}$  była w  $\mathbf{C}^m$  potrzeba aby wszystkie pochodne cząstkowe do stopnia  $m$  były ciągłe. Jednak są nimi funkcje z  $F$ , które z założenia są ciągłe. ■

Zauważmy, że w powyższym dowodzie korzystamy ze słabszej wersji warunku 2.1, w której po prawej stronie występuje  $o(|x - a|)$  zamiast  $o(|x - a|^{m-|l|})$ . Faktycznie jednak, jeśli ta słabsza wersja jest spełniona, to ta silniejsza także.

Mogłoby się jednak na pierwszy rzut oka wydawać, że być może w założeniach lematu 2.3 wystarczyłby warunek 2.1 dla  $l = 0$ . Tak jednak nie jest.

Możemy już przejść do kluczowej definicji:

**Definicja 2.4** Niech  $A \subset \mathbb{R}^n$  będzie dowolnym zbiorem. Wówczas przez  $\widehat{\mathbf{C}}^m(A)$  oznaczymy przestrzeń tych  $F \in \mathbf{J}^m(A)$ , dla których zachodzi warunek 2.1

Zauważmy, że obiekt ten jest przestrzenią liniową. Ponadto z lematu 2.3 (i wcześniejszych rozważań) dowiadujemy się, dla zbiorów otwartych  $U \subset \mathbb{R}^n$  mamy równość  $\widehat{\mathbf{C}}^m(U) = \mathbf{C}^m(U)$ .

## 2.2. Twierdzenie Whitneya

**Twierdzenie 2.5 (Whitney)** Niech  $K$  będzie zbiorem zwartym oraz niech  $F = \left(f^{(l)}\right)_{|l| \leq m}$  będzie z  $\widehat{\mathbf{C}}^m(K)$ . Wówczas istnieje  $\tilde{f} \in \mathbf{C}^m(\mathbb{R}^n)$  taka, że dla  $x \in K$  zachodzi

$$\left(\nabla^m \tilde{f}\right)(x) = F(x)$$

Dowód powyższego twierdzenia znajduje się w pracy [Whi34].



## Rozdział 3

# Funkcja niestała na spójnym zbiorze punktów krytycznych

W rozdziale tym przedstawię przykład Whitneya [Whi35] funkcji niestałej na spójnym zbiorze punktów krytycznych. Mówi o tym następujące twierdzenie:

**Twierdzenie 3.1** *Istnieje funkcja  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  klasy  $C^1$ , która nie jest stała na pewnym spójnym zbiorze punktów krytycznych.*

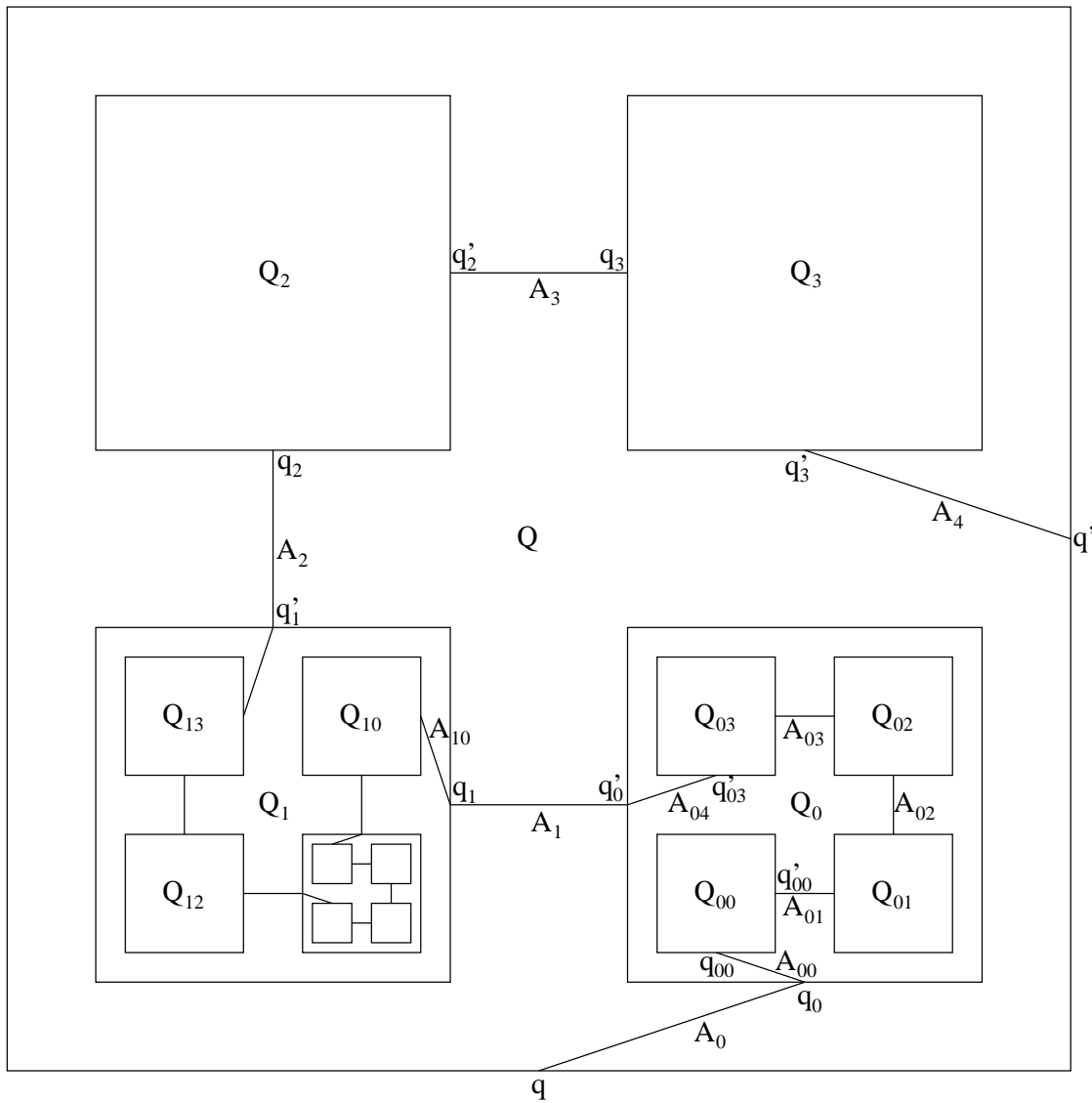
Oczywiście zbiór wartości krytycznych takiej funkcji musi zawierać odcinek, gdyż obraz spójnego zbioru punktów krytycznych, na którym funkcja jest niestała, jest spójny i nie jednopunktowy.

Najpierw skonstruuję krzywą, która będzie zbiorem punktów krytycznych. Później określę funkcję na tej krzywej. Następnie skorzystam z twierdzenia Whitneya, aby rozszerzyć funkcję na całą płaszczyznę.

### 3.1. Krzywa

Niech  $Q$  będzie kwadratem na płaszczyźnie o boku 1. Niech  $Q_0, Q_1, Q_2, Q_3$  będą kwadratami o boku  $\frac{1}{3}$  leżącymi wewnątrz  $Q$  w porządku cyklicznym, każdy w odległości  $\frac{1}{12}$  od dwóch boków  $Q$ . Niech  $q$  i  $q'$  będą środkami boków  $Q$  przyległych do  $Q_0$  i  $Q_1$  oraz do  $Q_3$  i  $Q_0$ . Niech  $q_i$  i  $q'_i$  będą środkami sąsiednich boków  $Q_i$  (dla  $i \in \{0, 1, 2, 3\}$ ) w ten sposób, aby punkty  $q'_{i-1}$  i  $q_i$  leżały naprzeciw siebie (dla  $i \in \{1, 2, 3\}$ ) oraz aby punkt  $q_0$  leżał blisko  $q$ , a punkt  $q'_3$  blisko  $q'$ . Niech  $A_0$  będzie odcinkiem łączącym  $q$  i  $q_0$ , niech  $A_i$  łączy  $q'_{i-1}$  i  $q_i$  (dla  $i \in \{1, 2, 3\}$ ) oraz niech  $A_4$  łączy  $q'_3$  z  $q'$  (patrz rysunek 3.1).

Teraz indukcyjnie będziemy konstruować kolejne kwadraty, punkty i odcinki. Załóżmy, że mamy już kwadraty  $Q_{i_1 \dots i_t}$ , punkty  $q_{i_1 \dots i_t}, q'_{i_1 \dots i_t}$  oraz odcinki  $A_{j_1 \dots j_t}$  dla wszystkich  $t < s$ ,  $i_1, \dots, i_t, j_1, \dots, j_{t-1} \in \{0, 1, 2, 3\}$ ,  $j_t \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ . Weźmy kwadrat  $Q_{i_1 \dots i_{s-2}}$ , zmniejszając go trzy razy i ewentualnie obracając lub odwracając go do góry nogami, możemy umieścić go w  $Q_{i_1 \dots i_{s-1}}$  tak, aby  $q_{i_1 \dots i_{s-2}}$  i  $q'_{i_1 \dots i_{s-2}}$  przeszły na  $q_{i_1 \dots i_{s-1}}$  i  $q'_{i_1 \dots i_{s-1}}$  odpowiednio. W ten sposób otrzymujemy kwadraty  $Q_{i_1 \dots i_s}$  i odpowiednie punkty i odcinki. Kontynuujemy ten proces w nieskończoność. Niech ponadto  $Q_{i_1 i_2 \dots}$  będzie punktem wspólnym  $Q, Q_{i_1}, Q_{i_1 i_2}, \dots$  dla dowolnych  $(i_1, i_2, \dots)$ . Istnieje dokładnie jeden taki wspólny punkt na podstawie wspomnianego już twierdzenia Cantora — jako przecięcie zstępującej rodziny zbiorów domkniętych o promieniu dążącym do zera.



Rysunek 3.1: Podział kwadratu i przebieg krzywej

Odcinki  $A_{i_1 \dots i_s}$  wraz z punktami  $Q_{i_1 i_2 \dots}$  tworzą krzywą  $A$ . Możemy ją przedstawić jako obraz homeomorficzny odcinka  $(0, 1)$  przypisując odcinkowi  $A_{i_1 \dots i_s}$  odcinek

$$\left( \frac{2i_1 + 1}{9} + \dots + \frac{2i_{s-1} + 1}{9^{s-1}} + \frac{2i_s}{9^s}, \frac{2i_1 + 1}{9} + \dots + \frac{2i_{s-1} + 1}{9^{s-1}} + \frac{2i_s + 1}{9^s}, \right)$$

natomiast punktowi  $Q_{i_1 i_2 \dots}$  liczbę

$$\frac{2i_1 + 1}{9} + \frac{2i_2 + 1}{9^2} + \dots$$

## 3.2. Funkcja

Najpierw zdefiniujemy funkcję  $f(x, y)$  dla punktów należących do łuku  $A$  w następujący sposób:

$$f(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \frac{i_1}{4} + \dots + \frac{i_s}{4^s} & \text{jeśli } (x, y) \in A_{i_1 \dots i_s} \\ \frac{i_1}{4} + \frac{i_2}{4^2} + \dots & \text{jeśli } (x, y) = Q_{i_1 i_2 \dots} \end{cases}$$

Widzimy, że  $f$  rośnie od 0 do 1 w miarę jak przechodzimy wzdłuż  $A$  od  $q$  do  $q'$ . Przyjmijmy  $f_{00}(x, y) = f(x, y)$ ,  $f_{10}(x, y) = f_{01}(x, y) = 0$  na  $A$ . Pokażemy zaraz, że  $(f_{00}, f_{10}, f_{01}) \in \widehat{\mathbf{C}}^1(A)$  w sensie zdefiniowanym w rozdziale 2. Umożliwi to skorzystanie z twierdzenia 2.5. Wynika z niego, że funkcja  $f(x, y)$  może być rozszerzona na całą płaszczyznę tak, że  $f$  będzie klasy  $\mathbf{C}^1$  oraz  $\frac{\partial f}{\partial x} = f_{10} = 0$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y} = f_{01} = 0$  na  $A$ , czyli każdy punkt  $A$  będzie punktem krytycznym. Taka funkcja spełnia tezę twierdzenia 3.1

Oczywiście  $f_{10}$  i  $f_{01}$  są ciągle na  $A$ , więc jedyne co trzeba udowodnić, to następujący lemat:

**Lemat 3.2** *Dla każdego  $\varepsilon > 0$  istnieje  $\delta > 0$  taka, że jeśli  $(x, y)$  i  $(x', y')$  są punktami  $A$ , znajdującymi się w odległości  $r < \delta$  od siebie, to*

$$|f(x', y') - f(x, y)| < r\varepsilon \quad (3.1)$$

W celu dowodu powyższego lematu sformułujmy dwa podlematy:

**Lemat 3.3** *Jeśli  $(x, y)$  i  $(x', y')$  są punktami  $A$  leżącymi wewnątrz  $Q_{i_1 \dots i_s}$ , to*

$$|f(x', y') - f(x, y)| \leq \frac{1}{4^s} \quad (3.2)$$

**Lemat 3.4** *Jeśli  $(x, y)$  i  $(x', y')$  są punktami  $A$  oddzielonymi pewnym punktem  $Q_{i_1 i_2 \dots}$  i jeśli  $Q_{i_1 \dots i_s}$  jest najmniejszym kwadratem zawierającym je oba, to*

$$r > \frac{1}{12} \frac{1}{3^{s+1}} \quad (3.3)$$

Na początek przyjmijmy lematy 3.3 i 3.4 za prawdziwe i spójrzmy, jak wynika z nich lemat 3.2. Następnie udowodnimy także te lematy.

**Dowód lematu 3.2** Mając dane  $\varepsilon > 0$  wybierzmy  $s_0$  i  $\delta$  tak, aby

$$36 \left( \frac{3}{4} \right)^{s_0} < \varepsilon, \quad \delta < \frac{1}{12} \frac{1}{3^{s_0+1}} \quad (3.4)$$

Niech teraz  $(x, y)$  i  $(x', y')$  będą dowolnymi dwoma punktami na  $A$  odległymi o  $r < \delta$ . Jeśli pomiędzy nimi nie leży żaden punkt  $Q_{i_1 i_2 \dots}$ , to w ogóle jest  $f(x', y') = f(x, y)$ , czyli 3.1 zachodzi. W przeciwnym wypadku niech  $Q_{i_1 \dots i_s}$  będzie najmniejszym kwadratem zawierającym je oba. Z lematu 3.4 mamy

$$\frac{1}{12} \frac{1}{3^{s+1}} < r < \delta < \frac{1}{12} \frac{1}{3^{s_0+1}}$$

Stąd  $s > s_0$ . Korzystając teraz z obu lematów 3.3 i 3.4 dostajemy

$$\frac{|f(x', y') - f(x, y)|}{r} \leq \frac{12 \cdot 3^{s+1}}{4^s} = 36 \left(\frac{3}{4}\right)^s < 36 \left(\frac{3}{4}\right)^{s_0} < \varepsilon$$

co właśnie należało dowieść. ■

**Dowód lematu 3.3** Żądany warunek wynika natychmiast z definicji  $f$ . ■

**Dowód lematu 3.4** Rozważmy trzy przypadki:

1. Żaden z punktów nie należy do żadnego spośród kwadratów  $Q_{i_1 \dots i_s i_{s+1}}$ . Leżą one wtedy na dwóch różnych odcinkach spośród  $A_{i_1 \dots i_s j_{s+1}}$ . Odcinki te są od siebie odległe w poziomie lub pionie o przynajmniej połowę boku kwadratu rzędu  $s + 1$ , czyli zachodzi nawet  $r > \frac{1}{2 \cdot 3^{s+1}}$
2. Oba punkty należą do pewnych kwadratów  $Q_{i_1 \dots i_s i_{s+1}}$ ,  $Q_{i_1 \dots i_s i'_{s+1}}$ . Będą to różne kwadraty, bo założyliśmy, że  $Q_{i_1 \dots i_s}$  jest najmniejszym kwadratem zawierającym oba te punkty. Kwadraty te są od siebie odległe w poziomie lub pionie o przynajmniej połowę swojego boku, czyli podobnie jak w poprzednim przypadku zachodzi  $r > \frac{1}{2 \cdot 3^{s+1}}$
3. Jeden punkt należy do pewnego kwadratu  $Q_{i_1 \dots i_s i_{s+1}}$ , a drugi nie. Jeśli ten drugi punkt leży na odcinku nie sąsiadującym z kwadratem, w którym jest pierwszy punkt, to jest odległy od tego kwadratu w poziomie lub pionie o przynajmniej jedną czwartą jego boku. Przyjmijmy więc teraz, że drugi punkt leży na odcinku sąsiadującym z naszym kwadratem. Wiemy z założenia, że punkty były oddzielone pewnym punktem  $Q_{i_1 i_2 \dots}$ . W tej sytuacji drugi punkt jest odległy od boku, do którego dochodzi odcinek zawierający pierwszy punkt, o przynajmniej  $\frac{1}{12}$  boku kwadratu (bo nie leży on na odcinku dochodzącym do tego boku). Zatem zachodzi  $r > \frac{1}{12 \cdot 3^{s+1}}$

■

# Bibliografia

- [Maurin] K. Maurin, *Analiza, Część I: Elementy*, PWN, 1974.
- [Morse39] A.P. Morse, *The behavior of a function on its critical set*, Ann. of Math. 40 (1939), 62–70.
- [Rudin] W. Rudin, *Podstawy analizy matematycznej*, PWN, 2000.
- [Sard42] A. Sard, *The measure of the critical values of differentiable maps*, Bull. Amer. Math. Soc. 48 (1942), 883–890.
- [Whi34] H. Whitney, *Analytic extensions of differentiable functions defined in closed sets*, Trans. Amer. Math. Soc. 36 (1934), no. 1, 63–89.
- [Whi35] H. Whitney, *A function not constant on a connected set of critical points*, Duke Math. J. 1 (1935), 514–517.