Złożoność obliczeniowa
Ćwiczenia 7

Przypomnienie definicji

Klasa $\mathsf{u\text{-}NC}^1$ obejmuje funkcje $\{0,1\}^* \to \{0,1\}$ obliczalne przez ciągi obwodów o wielomianowym rozmiarze i głębokości $O(\log n)$, w których bramki AND i OR mają stopień wejściowy co najwyżej 2, a zarazem takie, że istnieje maszyna Turinga, która dla wejścia 1^n produkuje n-ty obwód z ciągu działając w pamięci logarytmicznej.

Mówimy, że język L jest rozpoznawany przez maszynę M z *poradą* (*advice*) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, jeśli słowo w należy do L wtedy i tylko wtedy gdy M akceptuje parę $a_{|w|}\$w$. Klasa $\mathsf{P/poly}$ obejmuje języki rozpoznawane przez maszyny z poradą długości wielomianowej działające w czasie wielomianowym.

Zadania

Zadanie 1 (aka. 6.7). Udowodnij, że każda funkcja $f\colon \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ jest obliczalna przez obwód rozmiaru co najwyżej $1000\cdot\frac{2^n}{n}$ (gdzie przez rozmiar rozumiemy liczbę krawędzi / drutów).

Zadanie 2 (aka. 6.8). Niech p_n będzie prawdopodobieństwem, że losowo wybrana funkcja $f\colon \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ jest obliczalna przez obwód rozmiaru co najwyżej $\frac{2^n}{10n}$ (gdzie przez rozmiar rozumiemy liczbę krawędzi / drutów). Udowodnij, że $\lim_{n\to\infty} p_n = 0$.

Zadanie 3 (aka. 6.9). Wykaż, że $\mathsf{u\text{-}NC}^1 \subseteq \mathsf{L}$.

Zadanie 4. Rozważmy następujący problem obliczeniowy: mamy dany niedeterministyczny automat skończony A oraz słowo w (nad alfabetem wejściowym tego automatu). Pytamy się, czy A akceptuje w. Wykazać, że ten problem da się rozstrzygnąć w deterministycznej pamięci $O(\log|A|\cdot\log|w|)$.

Zadanie 5. Formuła ϕ w postaci CNF jest hornowska (*Horn formula*) jeśli w każdej klauzuli co najwyżej jedna zmienna występuje pozytywnie. Wykaż, że problem SAT dla formuł hornowskich da się rozwiązać wielomianowo.

Zadanie 6. Wykaż, że problem SAT dla formuł CNF, w których każda zmienna występuje co najwyżej dwa razy, da się rozwiązać wielomianowo.

Zadanie 7. Wykaż, że jeśli $\mathsf{P} = \mathsf{NP}$, to $\mathsf{EXPTIME} = \mathsf{NEXPTIME}$.

Zadanie 8. Udowodnij, że klasy NL oraz NP są zamknięte na gwiazdkę Kleene'ego.

Zadanie 9. Udowodnij, że istnieje funkcja, która może być obliczona przez maszynę z poradą długości 1, ale nie może być obliczona bez porady.

Zadanie 10. Powiemy, że język $L \subseteq \Sigma^*$ jest *rzadki* jeśli $|L \cap \Sigma^n| \leq p(n)$ dla pewnego wielomianu p. Udowodnij, że wszystkie języki rzadkie są w $\mathsf{P/poly}$.