Złożoność obliczeniowa
Ćwiczenia 5

Przypomnienie definicji

Definiując złożoność pamięciową maszyny obliczającej funkcję nie wliczamy długości wejścia (które jest tylko do odczytu) oraz długości wyjścia (które jest tylko do zapisu – dopisujemy po jednej literce na końcu, nie możemy się cofać i czytać).

Zadania

Zadanie 1 (aka 3.9). Wykaż, że jeśli funkcje $f, g : \{0,1\}^* \to \{0,1\}^*$ są obliczalne w pamięci logarytmicznej / w czasie wielomianowym, to ich złożenie także. Czy to samo jest prawdziwe dla pamięci wielomianowej?

Zadanie 2 (aka 3.10). Wykaż, że poprawne wyrażenia nawiasowe, przykładowo ((())()), da się rozpoznawać w logarytmicznej pamięci. A jak będzie jeśli w wyrażeniu moga się pojawiać dwa rodzaje nawiasów, () oraz []?

Zadanie 3 (aka 3.11). Dana jest formuła logiczna nie używająca zmiennych, innymi słowy, term nad operacjami logicznymi $\wedge$, $\vee$, $\neg$, gdzie w liściach są stałe. Wykaż, że można obliczyć wartość logiczną takiej formuły w logarytmicznej pamięci.

Zadanie 4 (aka 3.12). Ustalmy pewną skończoną algebrę $\mathbb{A}$: składa się ona ze skończonego nośnika A oraz skończonego zbioru funkcji $\mathcal{F}$. Każda funkcja $f \in \mathcal{F}$ ma ustaloną arność r, i działa z A^r w A. Rozważmy następujący problem: dany term τ nad A ze stałymi w liściach, należy wyewaluować τ. Udowodnij, że ten problem da się rozwiązać w pamięci logarytmicznej.

Zadanie 5 (aka 3.13). Udowodnij, że klasy P oraz PSPACE są zamknięte na gwiazdkę Kleene'ego, czyli jeśli L jest w klasie, to

$$L^* = \{u_1 u_2 \dots u_n : u_i \in L\}$$

też jest w klasie.

Zadanie 6. Wykaż, że mając daną liczbę $n \in \mathbb{N}$ można w czasie wielomianowym znaleźć najmniejszą liczbę $a \in \mathbb{N}$ taką, że $n = a^k$ dla pewnego $k \in \mathbb{N}$.

Zadanie 7. Wykaż, że dla każdego obwodu używającego bramek AND, OR, NOT istnieje równoważny obwód używający tylko bramek AND i OR, nie większej głębokości i mający co najwyżej dwukrotnie więcej bramek.

Zadanie 8. Funkcja add: $\{0,1\}^{2n} \to \{0,1\}^{n+1}$ dodaje dwie liczby zapisane binarnie. Skonstruuj obwód dla add o wielomianowej liczbie bramek i stałej głębokości.

Zadanie 9. Funkcja majority dla danego ciągu bitów długości n zwraca 0 jeśli mniej niż połowa wejściowych bitów to jedynki, oraz 1 w przeciwnym przypadku. Skonstruuj obwód dla majority o liczbie bramek $O(n)$ i głębokości $O(\log n)$.

Zadanie 10. Skonstruuj obwód o wielomianowej wielkości i stałej głębokości dla funkcji parity, używający binarnych bramek AND, OR, NOT oraz bramek majority o nieograniczonym stopniu wejściowym.