Złożoność obliczeniowa
Ćwiczenia 3

Przypomnienie definicji

Złożoność Kolmogorowa $K(w)$ słowa $w \in \{0,1\}^*$ to rozmiar najmniejszej maszyny Turinga M wypisującej w (gdy zostanie uruchomiona na pustym wejściu). Dokładniej, $K(w)$ to długość opisu maszyny M jako słowa nad alfabetem $\{0,1\}$.

Funkcja f jest *pamięciowo konstruowalna* jeśli istnieje maszyna wsadowa, która, dostawszy słowo 1^n, zapisuje na taśmie roboczej dokładnie $f(n)$ komórek, działając w pamięci $O(f(n))$. Funkcja f jest *czasowo konstruowalna* jeśli istnieje maszyna wsadowa, która, dostawszy słowo 1^n, zapisuje na taśmie roboczej dokładnie $f(n)$ komórek, działając w czasie $O(f(n))$. Uwaga: W obu przypadkach można używać więcej niż jednej taśmy roboczej.

Definiując złożoność pamięciową maszyny obliczającej funkcję nie wliczamy długości wejścia (które jest tylko do odczytu) oraz długości wyjścia (które jest tylko do zapisu – dopisujemy po jednej literce na końcu, nie możemy się cofać i czytać).

Zadania

Zadanie 1. Udowodnij, że istnieje nieskończenie wiele słów niekompresowalnych, tzn. takich, że $K(w) \geq |w|$.

Zadanie 2. Udowodnij, że jeśli $\alpha\colon \mathbb{N} \to \{0,1\}^*$ jest funkcją różnowartościową, to dla nieskończenie wielu wartości n zachodzi $|\alpha(n)| > \lfloor \log_2 n \rfloor$ (oznacza to, że żaden sposób zapisu liczb naturalnych nie może być bardziej efektywny niż tradycyjny zapis binarny).

Zadanie 3 (aka. 1.6). Wykaż, że jeśli jednotaśmowa maszyna M rozpoznaje język palindromów binarnych, to maksymalna liczba kroków użyta przez M na wejściach długości n jest w $\Omega(n^2)$.

Zadanie 4 (aka. 2.7). *Automat wielogłowicowy* chodzi po słowie wejściowym przy pomocy pewnej stałej liczby głowic. Przejścia automatu zależą od krotki symboli pod głowicami, a operacja wykonana w przejściu polega na ruszeniu się każdej głowicy. Uwaga: automat nie pisze po słowie, jedynie czyta symbole i rusza głowicami. Wykazać, że dany język L jest rozpoznawalny przez pewien automat wielogłowicowy wtedy i tylko wtedy gdy jest rozpoznawalny przez maszynę Turinga działającą w logarytmicznej pamięci.

Zadanie 5 (aka. 2.8). Język L jest zdefiniowany jako zbiór słów postaci:

$$\#0\ldots000\#0\ldots001\#0\ldots010\#0\ldots011\#\ldots\#1\ldots111\#$$

gdzie każdy blok ma długość k dla pewnego $k \in \mathbb{N}$ (mamy tutaj zapisy binarne wszystkich liczb od 0 do $2^k - 1$). Udowodnić, że L da się rozpoznać w pamięci $O(\log\log n)$. Uwaga: Należy zapewnić pamięć $O(\log\log n)$ także dla słów spoza języka.

Zadanie 6. Udowodnij, że następujące funkcje są pamięciowo konstruowalne: n, $2n$, n^2, $n^2 + n$, 2^n, $\lceil \log n \rceil$.

Zadanie 7. Udowodnij, że następujące funkcje są czasowo konstruowalne: n, $2n$, n^2, 2^n, 2^{2^n}, $\lfloor n \log n \rfloor$.

Zadanie 8. Jeśli f i g są pamięciowo/czasowo konstruowalne, to $f + g$, $f \cdot g$, f^g także.

Zadanie 9. Wykaż, że jeśli funkcje $f, g : \{0,1\}^* \to \{0,1\}^*$ są obliczalne w pamięci logarytmicznej / w czasie wielomianowym, to ich złożenie także. Czy to samo jest prawdziwe dla pamięci wielomianowej?

Zadanie 10. Wykaż, że poprawne wyrażenia nawiasowe, przykładowo ((())()), da się rozpoznawać w logarytmicznej pamięci. A jak będzie jeśli w wyrażeniu moga się pojawiać dwa rodzaje nawiasów, () oraz []?

Zadanie 11. Dana jest formuła logiczna nie używająca zmiennych, innymi słowy, term nad operacjami logicznymi $\wedge$, $\vee$, $\neg$, gdzie w liściach są stałe. Wykaż, że można obliczyć wartość logiczną takiej formuły w logarytmicznej pamięci.

Zadanie 12. Ustalmy pewną skończoną algebrę $\mathbb{A}$: składa się ona ze skończonego nośnika A oraz skończonego zbioru funkcji $\mathcal{F}$. Każda funkcja $f \in \mathcal{F}$ ma ustaloną arność r, i działa z A^r w A. Rozważmy następujący problem: dany term τ nad A ze stałymi w liściach, należy wyewaluować τ. Udowodnij, że ten problem da się rozwiązać w pamięci logarytmicznej.

Zadanie 13. Udowodnij, że klasy P oraz PSPACE są zamknięte na gwiazdkę Kleene'ego, czyli jeśli L jest w klasie, to

$$L^* = \{u_1 u_2 \ldots u_n : u_i \in L\}$$

też jest w klasie.