Złożoność obliczeniowa
Ćwiczenia 13

Przypomnienie definicji

Klasa RP obejmuje języki, dla których istnieje wielomianowy algorytm randomizowany, który każde słowo z języka akceptuje z prawdopodobieństwem co najmniej 1/2, a każde słowo spoza języka zawsze odrzuca.

Klasa BPP obejmuje języki, dla których istnieje wielomianowy algorytm randomizowany, który każde słowo z języka akceptuje z prawdopodobieństwem co najmniej 3/4, a każde słowo spoza języka odrzuca z prawdopodobieństwem co najmniej 3/4.

Klasa PP obejmuje języki, dla których istnieje wielomianowy algorytm randomizowany, który każde słowo z języka akceptuje z prawdopodobieństwem co najmniej 1/2, a każde słowo spoza języka akceptuje z prawdopodobieństwem mniejszym niż 1/2.

Klasa ZPP obejmuje języki posiadające wielomianowy algorytm Las Vegas: algorytm używający randomizacji, który jest zawsze poprawny, ale którego czas działania ma wartość oczekiwaną ograniczoną wielomianowo.

Zadania

Zadanie 1. W problemie Permutation k-Path mamy dany graf skierowany G z wierzchołkami pokolorowanymi na k kolorów $1, 2, \ldots, k$. Pytamy się o istnienie ścieżki długości k takiej, że pierwszy wierzchołek jest koloru 1, drugi koloru 2, itd. Wykaż, że problem Permutation k-Path da się rozwiązać wielomianowo.

Zadanie 2. W problemie Colorful k-Path mamy dany graf skierowany G z wierzchołkami pokolorowanymi na k. Pytamy się o istnienie ścieżki długości k takiej, w której wierzchołki są parami różnych kolorów (ale niekoniecznie w określonej kolejności). Wykaż, że problem Colorful k-Path da się rozwiązać w czasie $2^k \cdot poly(|G|)$.

Zadanie 3. W problemie k-Path mamy dany graf skierowany G i pytamy się o istnienie ścieżki prostej na k wierzchołkach. Wykaż, że problem ten da się rozwiązać algorytmem Monte-Carlo z jednostronnym błędem (fałszywymi negatywami) w czasie $(2e)^k \cdot poly(n)$. Wysnuj wniosek, że pytanie o istnienie skierowanej ścieżki o długości $k = O(\log n)$ jest w klasie RP.

Zadanie 4 (aka 12.6). Udowodnij, że $\mathsf{NP} \subseteq \mathsf{PP}$.

Zadanie 5 (aka 12.7). Udowodnij, że klasa BPP jest zamknięta na gwiazdkę Kleene'go.

Zadanie 6 (aka 12.8). Udowodnij, że jeśli $\mathsf{NP} \subseteq \mathsf{BPP}$ to $\mathsf{NP} = \mathsf{RP}$.

Zadanie 7 (aka 12.9). Udowodnij, że $\mathsf{ZPP} = \mathsf{RP} \cap \mathsf{coRP}$.

Zadanie 8 (aka 12.10). Niech M będzie probabilistyczną maszyną Turinga, działającą w czasie wielomianowym i używającą logarytmicznej pamięci roboczej. Niech L będzie językiem zawierającym słowa w akceptowane przez M z prawdopodobieństwem co najmniej $1/2$ (zatem dla słów spoza L prawdopodobieństwo akceptacji jest mniejsze niż $1/2$). Wykaż, że $L \in \mathsf{P}$.