Złożoność obliczeniowa
Ćwiczenia 1

Przypomnienie maszyn Turinga

Jednotaśmowa, deterministyczna maszyna Turinga M ma następujące komponenty:

- alfabet wejściowy Σ,
- alfabet roboczy $\Gamma \supseteq \Sigma$ zawierający $\perp, \triangleright \notin \Sigma$,
- zbiór stanów Q, oraz
- funkcja przejścia δ.

Maszyna dostaje na wejściu słowo x nad alfabetem wejściowym Σ, zapisane (prawie) na początku prawostronnie nieskończonej taśmy. Po lewej od słowa wejściowego x znajduje się niezmienialny znacznik $\triangleright$, reszta taśmy jest wypełniona blankami $\perp$. Głowica jest na początku na $\triangleright$, stan początkowy to jakiś ustalony q_0. Maszyna porusza się zgodnie z funkcją przejścia δ: w zależności od stanu i litery pod głowicą, maszyna zapisuje coś w komórce (lub nie, tzn. zapisuje to co tam było wcześniej), porusza się o jeden krok w lewo, w prawo, lub zostaje w miejscu, oraz zmienia stan. Zakładamy, że znacznika $\triangleright$ nie da się nadpisać i nie można pójść na lewo od niego (zabronione w funkcji przejścia maszyny). Oprócz tego maszyna może przejść do specjalnego stanu q_A (Accept) lub q_R (Reject); wtedy obliczenie się kończy i słowo wejściowe jest akceptowane lub odrzucane.

Maszyna wielotaśmowa, jak sama nazwa wskazuje, ma wiele taśm (ustaloną z góry liczbę). Słowo wejściowe jest napisane na pierwszej taśmie, reszta jest wypełniona blankami. Na każdej taśmie jest głowica, przejścia zależą od stanu maszyny i krotki symboli pod głowicami, zaś instrukcje składają się z krotki instrukcji dla każdej taśmy (lewo/prawo/stój, oraz zapis).

Język $L \subseteq \Sigma^*$ jest częściowo *obliczalny* jeśli istnieje maszyna, która akceptuje każde słowo z L, a na każdym słowie spoza L albo się pętli, albo je odrzuca. Język L jest *obliczalny* jeśli istnieje maszyna, która się zatrzymuje na każdym słowie wejściowym (ma własność stopu) i akceptuje słowa z L oraz odrzuca słowa spoza L. Język L jest w $\mathsf{DTIME}(T(n))$ jeśli istnieje maszyna wielotaśmowa rozpoznająca czy dane słowo długości n jest w L w $O(T(n))$ krokach.

Zadania

Zadanie 1. Skonstruuj jednotaśmową maszynę rozpoznającą język palindromów w $O(n^2)$ krokach.

Zadanie 2. Skonstruuj dwutaśmową maszynę rozpoznającą język palindromów w $O(n)$ krokach.

Zadanie 3. Pokaż, że następujące modele zarówno dają się symulować przez jednotaśmową maszynę Turinga, oraz potrafią symulować jednotaśmową maszynę Turinga. W każdym przypadku oszacuj wzrost liczby kroków potrzebny do symulacji.

1. Maszyna jednotaśmowa, z obustronnie nieskończoną taśmą.
2. Maszyna wielotaśmowa, dla każdej ustalonej liczby taśm.
3. Maszyna jednotaśmowa, która ma co najwyżej 10 stanów.
4. Maszyna dwutaśmowa, która może pisać tylko po blankach.
5. Maszyna dwutaśmowa, w której pierwsza taśma z wejściem jest read-only, a druga, robocza, ma binarny alfabet roboczy.

Zadanie 4. Udowodnij, że jeśli istnieje wielotaśmowa maszyna rozpoznająca język L w co najwyżej $T(n)$ krokach, to również istnieje wielotaśmowa maszyna rozpoznająca L w co najwyżej $T(n)/2 + O(n)$ krokach.

Zadanie 5. Wykaż, że jeśli język L jest rozpoznawany przez maszynę jednotaśmową, która może pisać tylko po blankach, to L jest regularny.

Zadanie 6. Wykaż, że jeśli jednotaśmowa maszyna M rozpoznaje język palindromów binarnych, to maksymalna liczba kroków użyta przez M na wejściach długości n jest w $\Omega(n^2)$.

Zadanie 7. Udowodnij, że jeśli język L jest rozpoznawany przez jednotaśmową maszynę M działającą zawsze w $O(n)$ krokach na wejściach długości n, to L jest regularny.

Zadanie 8. Wykaż, że jeśli zarówno język L jak i jego dopełnienie $\overline{L} := \Sigma^* \setminus L$ są częściowo obliczalne, to L jest obliczalny.