Automaty a rekurencja – zadania zaliczeniowe

Zadanie 1. (0.5p) Typ postaci $\alpha_1 \to \ldots \to \alpha_k \to o$ nazwiemy jednorodnym, jeśli $ord(\alpha_1) \geqslant \ldots \geqslant ord(\alpha_k)$ oraz wszystkie $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ są jednorodne. Na przykład typ $(o \to o) \to (o \to o \to o) \to o \to o$ jest jednorodny, natomiast $(o \to (o \to o) \to o) \to o$ nie jest. Udowodnij, że dla każdego schematu rekurencyjnego istnieje schemat tego samego rzędu, w którym typy wszystkich nieterminali są jednorodne.
Wskazówka: Nie zmieniaj kolejności argumentów. Próbuj raczej zmienić typy niektórych argumentów, zwiększając ich rząd.

Zadanie 2. (0.5p) Automat z k stosami oprócz stanu ma k stosów (zwykłych, czyli rzędu 1). Podejmuje decyzję na podstawie stanu oraz krotki $a_1, \ldots, a_k$ symboli znajdujących się w wierzchołkach stosów (gdzie $a_i = \perp$ jeśli i-ty stos jest pusty). Dozwolone operacje to

- $push(i, a)$, wkładająca a na i-ty stos,
- $pop(i)$, zdejmująca jeden symbol z i-tego stosu i jednocześnie całkowicie opróżniająca stosy o numerach $i+1, i+2, \ldots, k$.

Udowodnij, że każdy język rozpoznawany przez automat z k stosami można rozpoznać przez automat ze stosem rzędu k.

Zadanie 3. (0.5p) Automat antykopiujący rzędu 2 to automat ze stosem rzędu 2, w którym zamiast operacji pop_2 jest operacja $antypush_2$; umożliwia ona usunięcie najwyższego stosu rzędu 1, ale tylko pod warunkiem, że jest on identyczny ze stosem znajdującym się poniżej. Udowodnij, że język jest rozpoznawany przez pewien automat antykopiujący rzędu 2 wtedy i tylko wtedy, gdy jest rozpoznawany przez pewien zwykły automat ze stosem rzędu 2.

Zadanie 4. (0.5p) Rozważmy następujący język L nad alfabetem nawiasów kwadratowych i okrągłych, $[,], (,)$. Słowo w należy do L jeśli:

- po usunięciu z w wszystkich nawiasów okrągłych otrzymujemy poprawnie ponawiasowane słowo nawiasów kwadratowych,
- po usunięciu z w wszystkich nawiasów kwadratowych otrzymujemy poprawnie ponawiasowane słowo nawiasów okrągłych oraz
- między każdym otwierającym nawiasem kwadratowym a odpowiadającym mu zamykającym nawiasem kwadratowym mamy tą samą liczbę symboli (co).

Na przykład słowa (), [()] ([)(]), ([([)(])]) należą do L, natomiast (, ([)], [)(] nie należą do L. Podaj niedeterministyczny automat ze stosem rzędu 2 lub niedeterministyczny schemat rekurencyjny rzędu 2 rozpoznający L.

Zadanie 5. (0.5p) Dla drzewa t nad alfabetem Σ oraz jego wierzchołka u, niech $\mathsf{mark}(t, u)$ będzie drzewem nad alfabetem $\Sigma \times \{0, 1\}$ powstałym przez dopisanie w wierzchołkach drzewa t liczby 0 lub 1: w u dopisujemy 1, a w pozostałych wierzchołkach 0. Podaj algorytm rozwiązujący poniższe zagadnienie:
Dane: λY-term M generujący drzewo nieskończone nad alfabetem Σ oraz automat skończony A z trywialnym warunkiem akceptacji, wczytujący drzewa nieskończone nad alfabetem $\Sigma \times \{0, 1\}$.
Wynik: λY-term M' generujący drzewo t zawierające dodatkowo w każdym wierzchołku u informację TAK/NIE, mówiącą czy A akceptuje $\mathsf{mark}(t, u)$.
Wskazówka: Zredukuj powyższy problem do podobnego problemu rozwiązanego na wykładzie.

Zadanie 6. (0.5p) Rozważmy λ-termy bez operatora rekurencji Y; generują one drzewa skończone. Oszacuj (chodzi o podanie zbliżonych do siebie ograniczeń górnego i dolnego) maksymalny rozmiar drzewa generowanego przez taki term M o złożoności n, jako funkcję n i rozmiaru M, w następujących przypadkach:

- gdy dostępne litery to a o randze 2 i c o randze 0,
- gdy dostępne litery to b o randze 1 i c o randze 0.