Automaty a Rekurencja - notatki z wykładu 8

Marek Sommer
prowadzący wykład: Paweł Parys

2016-11-29

1 Postawienie problemu

Dane są:

1. λY-term M, który:
   - jest zamknięty,
   - jest typu o,
   - generuje drzewo t;
2. automat A.

Chcemy uzyskać wzbogacony term M', generujący drzewo t' takie, że:

- każdy wierzchołek t' ma etykietę ze zbioru $\Sigma \times \mathcal{P}(Q)$ (gdzie $\mathcal{P}(Q)$ oznacza wszystkie podzbiory zbioru stanów automatu A);
- każdy wierzchołek $u \in \mathtt{dom}(t)$, z etykietą a, ma w drzewie t' etykietę (a, Q_u), gdzie Q_u to zbiór stanów, z których można zaakceptować poddrzewo drzewa t zaczynające się w wierzchołku u.

2 Refleksja

Powyższy problem można zapisać ogólniej. Zamiast automatu, dany jest skończony model μ rachunku λY. Chcemy uzyskać term M', generujący drzewo t', takie że każdy wierzchołek $u \in \mathtt{dom}(t)$, z etykietą a, ma w drzewie t' etykietę $\left(a, [\![M_u]\!]_\mu\right)$, gdzie M_u to term, z którego było generowane poddrzewo drzewa t zaczynające się w wierzchołku u.

3 Definicje

3.1 Typ $[\alpha]$

Niech α będzie typem termu. W naszym ustalonym modelu, zbiór $D[\alpha]$ (czyli zbiór możliwych wartości termu typu α) jest skończony. Możemy zatem uporządkować ten zbiór:

$$D[\alpha] = \{d_1, \ldots, d_k\}.$$

Wówczas definiujemy typ $[\alpha]$ jako

$$[\alpha] \stackrel{\text{def}}{=} o^k \to o = \underbrace{o \to o \to \ldots \to o \to}_{k} o.$$

Dla każdego $i \in \{1, \ldots, k\}$, wartość d_i (typu $D[\alpha]$) utożsamiamy z funkcją $\lambda x_1.\lambda x_2.\cdots.\lambda x_k.x_i$ (typu $[\alpha]$).

3.2 Konstrukcja case

Niech dany będzie term M typu $[\alpha]$. Niech dane będą też termy $M_1, \ldots, M_k$, każdy typu β, gdzie $\beta = \beta_1 \to \ldots \to \beta_m \to o$.

Definiujemy:

$$\left(\mathsf{case}\, M^{[\alpha]} \left\{d_i \rightsquigarrow M_i^\beta\right\}_{d_i \in D[\alpha]}\right)^\beta \stackrel{\text{def}}{=}$$

$$\stackrel{\text{def}}{=} \lambda y_1^{\beta_1}.\cdots.\lambda y_m^{\beta_m}.M\,(M_1\, y_1\, \ldots\, y_m)\, \ldots\, (M_k\, y_1\, \ldots\, y_m)\,.$$

Jeśli term M wylicza się do d_i, to term $\left(\mathsf{case}\, M\ \{d_i \rightsquigarrow M_i\}_{d \in D[\alpha]}\right) R_1\, \ldots\, R_m$ wylicza się do $M_i\, R_1\, \ldots\, R_m$ (za pomocą redukcji czołowych).[1]

3.3 Typy z kółkiem

$$o^\bullet \stackrel{\text{def}}{=} o$$

$$(\alpha \to \beta)^\bullet \stackrel{\text{def}}{=} \alpha^\bullet \to [\alpha] \to \beta^\bullet$$

4 Konstrukcja

Zakładając, że

- K jest termem typu α,
- v jest wartościowaniem, które niektórym zmiennym (ale przynajmniej wszystkim zmiennym wolnym termu K) przypisuje pewne wartości w modelu (przy czym $v(x^\beta) \in D[\beta]$),

zdefiniujemy term $\langle K \rangle_v$ typu $\alpha^\bullet$. Przypomnijmy, że przy tych samych założeniach zdefiniowana jest wartość $[\![K]\!]^v \in D[\alpha]$; zgodnie z podanym wyżej utożsamieniem traktujemy ją tutaj jako term typu $[\alpha]$. Definicja jest przez indukcję po budowie termu:

$$\langle M^{\alpha\to\beta}\, N^\alpha \rangle_v^{\beta^\bullet} \stackrel{\text{def}}{=} \langle M^{\alpha\to\beta} \rangle_v^{(\alpha\to\beta)^\bullet}\ \langle N^\alpha \rangle_v^{\alpha^\bullet}\ \left([\![N^\alpha]\!]^v\right)^{[\alpha]}\ ,$$

$$\langle x^\alpha \rangle_v^{\alpha^\bullet} \stackrel{\text{def}}{=} x^{\alpha^\bullet}\ , \quad \text{// Zmienna o tej samej nazwie, lecz innego typu.}$$

$$\langle Y x^\alpha . M^\alpha \rangle_v^{\alpha^\bullet} \stackrel{\text{def}}{=} Y x^{\alpha^\bullet}.\langle M^\alpha \rangle_{v[x^\alpha \mapsto [\![Y x^\alpha . M^\alpha]\!]^v]}\ ,$$

$$\langle \lambda x^\alpha . M^\beta \rangle_v^{(\alpha\to\beta)^\bullet} \stackrel{\text{def}}{=} \lambda x^{\alpha^\bullet}.\lambda y^{[\alpha]}.\mathsf{case}\, y^{[\alpha]}\ \left\{d \rightsquigarrow \langle M \rangle_{v[x^\alpha \mapsto d]}\right\}_{d \in D[\alpha]}\ ,$$

$$\langle a\, N_1^o\, \ldots\, N_r^o \rangle_v^{o^\bullet} \stackrel{\text{def}}{=} (a, [\![a\, N_1^o\, \ldots\, N_r^o]\!]^v)\ \langle N_1^o \rangle_v^{o^\bullet}\ \ldots\ \langle N_r^o \rangle_v^{o^\bullet}\ .$$

[1] Redukcja czołowa, oznaczana $\longrightarrow_h$, to najbardziej zewnętrzna β/δ-redukcja.

Lemat. *Jeśli M jest typu o oraz $M \longrightarrow_h M'$, to $\langle M\rangle_v \longrightarrow_h^+ \langle M'\rangle_v$.*

Dowód. Mamy dwa przypadki: $M \longrightarrow_h M'$ to β-redukcja lub δ-redukcja. Jeśli jest to β-redukcja, to $M = (\lambda x^\alpha.\, P)\, Q\, R_1 \,\ldots\, R_m$ i $M' = P[Q/x]\, R_1 \,\ldots\, R_m$. Mamy wówczas:

$$
\begin{aligned}
\langle M\rangle_v &= \langle \lambda x.\, P\rangle_v\, \langle Q\rangle_v\, [\![Q]\!]^v\, \langle R_1\rangle_v\, [\![R_1]\!]^v \ldots \langle R_m\rangle_v\, [\![R_m]\!]^v = \\
&= \Big(\lambda x.\, \lambda y.\, \mathtt{case}\, y\, \big\{ d \leadsto \langle P\rangle_{v[x\mapsto d]} \big\}_{d\in D[\alpha]}\Big)\, \langle Q\rangle_v\, [\![Q]\!]^v \\
&\qquad\qquad \langle R_1\rangle_v\, [\![R_1]\!]^v \ldots \langle R_m\rangle_v\, [\![R_m]\!]^v \longrightarrow_h^+ \\
&\longrightarrow_h^+ \Big(\mathtt{case}\, [\![Q]\!]^v\, \big\{ d \leadsto \big(\langle P\rangle_{v[x\mapsto d]}[\langle Q\rangle_v/x]\big) \big\}_{d\in D[\alpha]}\Big) \\
&\qquad\qquad \langle R_1\rangle_v\, [\![R_1]\!]^v \ldots \langle R_m\rangle_v\, [\![R_m]\!]^v \longrightarrow_h^* \\
&\longrightarrow_h^* \langle P\rangle_{v[x\mapsto [\![Q]\!]^v]}[\langle Q\rangle_v/x]\, \langle R_1\rangle_v\, [\![R_1]\!]^v \ldots \langle R_m\rangle_v\, [\![R_m]\!]^v \stackrel{?}{=} \\
&\stackrel{?}{=} \langle P[Q/x]\rangle_v\, \langle R_1\rangle_v\, [\![R_1]\!]^v \ldots \langle R_m\rangle_v\, [\![R_m]\!]^v = \langle M'\rangle_v\,.
\end{aligned}
$$

Równość „$\stackrel{?}{=}$" wynika z następującego podlematu.

Lemat. *Dla każdych termów P, Q oraz wartościowania v, zachodzi równość:*

$$\langle P\rangle_{v'}[\langle Q\rangle_v/x] = \langle P[Q/x]\rangle_v$$

gdzie $v' = v[x \mapsto [\![Q]\!]^v]$.

Dowód. Przez prostą indukcję po rozmiarze termu. $\square$

Rozważmy teraz przypadek δ-redukcji, kiedy $M = (Yx.P)\, R_1 \,\ldots\, R_m$ i $M' = P[Yx.P/x]\, R_1 \,\ldots\, R_m$. Mamy wówczas:

$$
\begin{aligned}
\langle Yx.P\rangle_v &= Yx.\langle P\rangle_{v[x\mapsto [\![Yx.P]\!]^v]} \longrightarrow_h \\
&\longrightarrow_h \langle P\rangle_{v[x\mapsto [\![Yx.P]\!]^v]}[Yx.\langle P\rangle_{v[x\mapsto [\![Yx.P]\!]^v]}/x] = \\
&= \langle P\rangle_{v[x\mapsto [\![Yx.P]\!]^v]}[\langle Yx.P\rangle_v/x] \stackrel{?}{=} \\
&\stackrel{?}{=} \langle P[Yx.P/x]\rangle_v\,.
\end{aligned}
$$

Ponieważ $\langle M\rangle_v = \langle Yx.P\rangle_v\, \langle R_1\rangle_v\, [\![R_1]\!]^v \ldots \langle R_m\rangle_v\, [\![R_m]\!]^v$ i podobnie dla M', dostajemy $\langle M\rangle_v \longrightarrow_h \langle M'\rangle_v$. Równość $\stackrel{?}{=}$ uzyskujemy z podlematu z poprzedniego przypadku. $\square$

Powyższy lemat może zostać użyty do pokazania, że jeśli:

$$M \quad \longrightarrow_h^* \quad \begin{array}{c} a \\ M_1 \;\; \cdots \;\; M_k \end{array}$$

to:

$$\langle M\rangle_v \;\; \longrightarrow_h^* \;\; \Big\langle \begin{array}{c} a \\ M_1 \;\; \cdots \;\; M_k \end{array} \Big\rangle_v \;\; = \;\; \begin{array}{c} (a, [\![a\, M_1 \ldots M_k]\!]) \\ \langle M_1\rangle_v \;\; \cdots \;\; \langle M_k\rangle_v \end{array}$$

a także, że jeśli z M można w nieskończoność wykonywać redukcje czołowe bez dojścia do konstruktora drzewa, to tak samo można robić z $\langle M\rangle_v$. Oznacza to poprawność konstrukcji.

5 Omega

Powyższa konstrukcja dopisuje wartość termu w modelu do etykiet innych niż ω, natomiast symbole ω pozostawia bez zmian. Można to poprawić tak, aby zamiast symbolu ω również pojawiała się para $(\omega, [\![M_u]\!])$. Da się to zrobić przy założeniu, że mamy jakiś $X \subseteq D[o]$ taki, że $[\![M]\!] \in X$ wtedy i tylko wtedy, gdy M generuje ω. Wówczas definiujemy:

$$\langle M \rangle_v \stackrel{\text{def}}{=} (\omega, [\![M]\!]^v) \qquad \text{gdy } M \text{ ma typ } o \text{ oraz } [\![M^o]\!]^v \in X,$$

natomiast gdy M jest typu innego niż o lub gdy $[\![M^o]\!]^v \notin X$, term $\langle M \rangle_v$ definiujemy jak poprzednio. Łatwo zobaczyć, że jeśli w jakimś poddrzewie pojawi się term generujący omegę (nie wyliczający się do niczego), to wpadamy w nowy przypadek od razu wypisując symbol $(\omega, [\![M]\!]^v)$.

Skomentujmy założenie o istnieniu zbioru X „wykrywającego omegę”. Jeśli rozważamy model odpowiadający automatowi z trywialnym warunkiem akceptacji, to do automatu wystarczy dodać nowy stan q_ω, z którego jest jedynie przejście po literze ω. Wówczas jedyne drzewo akceptowane ze stanu q_ω to drzewo mające ω w korzeniu. Zatem jako X możemy wziąć zbiór tych zbiorów stanów P, że $q_\omega \in P$; taki X spełnia warunek, że $[\![M]\!] \in X$ wtedy i tylko wtedy, gdy M generuje ω.

Zauważmy, że powyższą konstrukcję możemy użyć do następującego zadania: dany term M generujący drzewo t przekształcić w term M' generujący drzewo t' powstałe z t poprzez zamianę wszystkich etykiet ω na Ω (chodzi o to, aby nie było podtermów nie wyliczających się do niczego i z tego powodu generujących ω; zamiast nich ma być po prostu wypisywanie symbolu Ω). To prosta adaptacja naszej konstrukcji: nie wypisujemy wartości w modelu, a jedynie w przypadku omegi wypisujemy Ω.