Tłumaczenie automatów CPDA na schematy rekurencyjne

Na tym wykładzie podamy tłumaczenie domykające nasze równoważności: pokażemy jak dla danego automatu CPDA skonstruować równoważny schemat rekurencyjny.

Rozpoczniemy podając definicję automatu CPDA (a właściwie jego stosu) wygodną dla nas. Ustalmy liczbę m_0, będącą rządem automatu, oraz alfabet stosowy Γ. Stos rzędu n (dla $1 \leq n \leq m_0$) to ε_n lub $s_{n-1} : s_n$, gdzie s_{n-1} to niepusty (czyli różny od ε_{n-1}) stos rzędu $n-1$, a s_n to stos rzędu n. Stos rzędu 0 to krotka $(a, s_2, s_3, \dots, s_{m_0})$, gdzie $a \in \Gamma$ oraz s_i to stos rzędu i, dla $2 \leq i \leq m_0$. W powyższej definicji ε_n oznacza pusty stos, natomiast $s_{n-1} : s_n$ oznacza stos powstały przez dołożenie elementu s_{n-1} na szczyt stosu s_n. Z kolei krotka $(a, s_2, s_3, \dots, s_{m_0})$ oznacza, że symbolem stosowym jest a, natomiast efektem wykonania operacji $\mathsf{collapse}_i$ będzie zamiana najwyższego stosu rzędu i na s_i. Napis $s_1 : s_2 : s_3$ rozumiemy jako $(s_1 : s_2) : s_3$ (lewostronna łączność).

Zobaczmy jak w tej notacji zapisują się poszczególne operacje (gdzie $1 \leq k \leq m_0$ i $2 \leq n \leq m_0$):

$$\begin{aligned}
\mathsf{push}_1^b((a, t_2, \dots, t_{m_0}) : s_1 : \dots : s_{m_0}) &= (b, s_2, \dots, s_{m_0}) : ((a, t_2, \dots, t_{m_0}) : s_1) : s_2 : \dots : s_{m_0}\,, \\
\mathsf{push}_n((a, t_2, \dots, t_{m_0}) : s_1 : \dots : s_{m_0}) &= \\
&\quad (a, t_2, \dots, t_{m_0}) : s_1 : \dots : s_{n-1} : ((a, t_2, \dots, t_{m_0}) : s_1 : \dots : s_n) : s_{n+1} : \dots : s_{m_0}\,, \\
\mathsf{pop}_k((a, t_2, \dots, t_{m_0}) : s_1 : \dots : s_{m_0}) &= s_k : \dots : s_{m_0}\,, \\
\mathsf{collapse}_n((a, t_2, \dots, t_{m_0}) : s_1 : \dots : s_{m_0}) &= t_n : s_{n+1} : \dots : s_{m_0}\,.
\end{aligned}$$

Niech $Q = \{1, \dots, |Q|\}$ będzie zbiorem stanów automatu $\mathcal{A}$ rzędu m_0. Zanim przejdziemy dalej, wprowadźmy następującą notację. Pisząc $\alpha^{|Q|}\!\to\beta$ mamy na myśli typ

$$\underbrace{\alpha\to\dots\to\alpha\to}_{|Q|}\beta\,.$$

Z kolei pisząc $M \langle N_i \mid i \in Q\rangle$ mamy na myśli aplikację $M\, N_1 \dots N_{|Q|}$. Oznaczymy też przez $\vec{x}_i$ ciąg zmiennych $x_{i,1}, \dots, x_{i,|Q|}$ oraz analogicznie dla $\vec{y}_i$; w szczególności $M\,\vec{x}_i$ oznacza aplikację $M\, x_{i,1} \dots x_{i,|Q|}$.

Zdefiniujmy typy

$$\alpha_{m_0} = o, \qquad\qquad \alpha_i = \alpha_{i+1}^{|Q|}\!\to\alpha_{i+1} \qquad \text{dla } 0 \leq i < m_0\,.$$

Innymi słowy, dla $0 \leq i \leq m_0$ mamy

$$\alpha_i = \alpha_{i+1}^{|Q|}\!\to\dots\to\alpha_{m_0}^{|Q|}\!\to o\,.$$

Dla każdego $a \in \Sigma$ i $q \in Q$ będziemy mieli nieterminal A_q^a typu $\alpha_2^{|Q|}\!\to\dots\to\alpha_{m_0}^{|Q|}\!\to\alpha_0$ oraz dla każdego $n \in \{1, \dots, m_0\}$ – nieterminal Ω_n typu α_n.

Powiemy teraz, jak za pomocą termu zbudowanego z nieterminali będziemy reprezentować pary (q, s), gdzie $q \in Q$ oraz s jest stosem pewnego rzędu n. Term $[q, s]$ ma być typu α_n. Definiujemy $[q, \varepsilon_n] = \Omega_n$ oraz

$$[q, (a, t_2, \dots, t_{m_0}) : s_1 : \dots : s_n] = A_q^a \,\langle [p, t_2] \mid p \in Q\rangle \dots \langle [p, t_{m_0}] \mid p \in Q\rangle\,\langle [p, s_1] \mid p \in Q\rangle \dots \langle [p, s_n] \mid p \in Q\rangle\,.$$

Zdefiniujemy teraz reguły dla poszczególnych nieterminali. Będą one zależały od przejścia automatu dostępnego z danej pary (p, a). Jeśli $(p, a) \xrightarrow{\varepsilon}_{\mathcal{A}} (q, \mathsf{push}_1^b)$, to

$$A_p^a\,\vec{y}_2 \dots \vec{y}_{m_0}\,\vec{x}_1 \dots \vec{x}_{m_0} \to A_q^b\,\vec{x}_2 \dots \vec{x}_{m_0}\,\langle A_r^a\,\vec{y}_2 \dots \vec{y}_{m_0}\,\vec{x}_1 \mid r \in Q\rangle\,\vec{x}_2 \dots \vec{x}_{m_0}\,.$$

Jeśli $(p, a) \xrightarrow{\varepsilon}_{\mathcal{A}} (q, \mathsf{push}_n)$, to

$$A_p^a\,\vec{y}_2 \dots \vec{y}_{m_0}\,\vec{x}_1 \dots \vec{x}_{m_0} \to A_q^a\,\vec{y}_2 \dots \vec{y}_{m_0}\,\vec{x}_1 \dots \vec{x}_{n-1}\,\langle A_r^a\,\vec{y}_2 \dots \vec{y}_{m_0}\,\vec{x}_1 \dots \vec{x}_n \mid r \in Q\rangle\,\vec{x}_{n+1} \dots \vec{x}_{m_0}\,.$$

Jeśli $(p, a) \xrightarrow{\varepsilon}_{\mathcal{A}} (q, \mathsf{pop}_k)$, to

$$A_p^a\,\vec{y}_2 \dots \vec{y}_{m_0}\,\vec{x}_1 \dots \vec{x}_{m_0} \to x_{k,q}\,\vec{x}_{k+1} \dots \vec{x}_{m_0}\,.$$

Jeśli $(p, a) \xrightarrow{\varepsilon}_{\mathcal{A}} (q, \mathsf{collapse}_n)$, to

$$A_p^a\,\vec{y}_2 \dots \vec{y}_{m_0}\,\vec{x}_1 \dots \vec{x}_{m_0} \to y_{n,q}\,\vec{x}_{n+1} \dots \vec{x}_{m_0}\,.$$

Jeśli zaś $(p, a) \xrightarrow{c}_{\mathcal{A}} (q_1, \dots, q_{rank(c)})$ jest przejściem wczytującym literę c i zmieniającym stan, to

$$A_p^a\, \vec{y}_2\, \dots\, \vec{y}_{m_0}\, \vec{x}_1\, \dots\, \vec{x}_{m_0} \to c\,(A_{q_1}^a\, \vec{y}_2\, \dots\, \vec{y}_{m_0}\, \vec{x}_1\, \dots\, \vec{x}_{m_0})\, \dots\, (A_{q_{rank(c)}}^a\, \vec{y}_2\, \dots\, \vec{y}_{m_0}\, \vec{x}_1\, \dots\, \vec{x}_{m_0})$$

Nieterminal odpowiadający pustemu stosowi powinien powodować zapętlenie:

$$\Omega_k\, \vec{x}_{k+1}\, \dots\, \vec{x}_{m_0} \to \Omega_k\, \vec{x}_{k+1}\, \dots\, \vec{x}_{m_0}\,.$$

Łatwo zobaczyć dla każdego z powyższych przypadków, że jeśli automat ma przejście z jakiejś konfiguracji (p, s) do konfiguracji (q, s'), to term $[p, s]$ redukuje się w jednym kroku do $[q, s']$. Zatem drzewo wygenerowane przez tak zdefiniowany schemat rekurencyjny będzie drzewem wygenerowanym przez automat $\mathcal{A}$. Musimy zaczynać generowanie z termu $[q_0, s_\perp]$, gdzie q_0 to stan początkowy, a $s_\perp$ to stos (rzędu m_0) zawierający jedynie symbol początkowy; możemy przejść do tego termu ze sztucznie dodanego nieterminala startowego.

Widzimy, że $ord(\alpha_n) = m_0 - n$ (dla $0 \leq n \leq m_0$), a zatem skonstruowany schemat rekurencyjny jest rzędu m_0. Zauważmy ponadto, że nasz schemat rekurencyjny jest wielomianowego rozmiaru względem rozmiaru automatu $\mathcal{A}$.