

Rozważmy język $L = \{1^n \mid n \geq 1\}$ (słowa składające się z samych jedynek). Bramka XOR to bramka, która wylicza się do 1 gdy na nieparzystości wielu wejściach dostaje 1. Udowodnij, że nie istnieje ciąg obwodów logicznych $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$ o stałej głębokości, rozpoznający L , w którym:

- (a) obecne są jedynie bramki wejściowe $x_1, \dots, x_n$ (nie ma zanegowanych bramek wejściowych), bramki AND o stopniu wejściowym 2 oraz jedna bramka XOR o dowolnym stopniu wejściowym, będąca bramką wynikową;
- (b) obecne są jedynie bramki wejściowe $x_1, \dots, x_n, \neg x_1, \dots, \neg x_n$, bramki NOT, bramki OR i AND o stopniu wejściowym 2 oraz bramki XOR o dowolnym stopniu wejściowym.

Każda z części warta jest 0.25 punktu.

Wskazówka: dowodząc część (b) skorzystaj z części (a) (rozwiązanie części (b) może zakładać, że część (a) została udowodniona).

WAŻNE: Rozwiązania tego zadania proszę oddawać w języku angielskim.¹

Consider the language $L = \{1^n \mid n \geq 1\}$ (words consisting of ones). A XOR gate is a gate which evaluates to 1 when it gets 1 on an odd number of inputs. Prove that there is no sequence of Boolean circuits $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$ having constant depth, recognizing L , and such that:

- (a) it uses only input gates $x_1, \dots, x_n$ (negated input gates are not available), AND gates of fan-in 2, and a single XOR gate of arbitrary fan-in being the output gate;
- (b) it uses only input gates $x_1, \dots, x_n, \neg x_1, \dots, \neg x_n$, NOT gates, OR and AND gates of fan-in 2, and XOR gates of arbitrary fan-in.

Each of the two parts is worth 0.25 points.

Hint: while proving part (b) you can use part (a) (in your solution of part (b) you can assume that part (a) is proven).

IMPORTANT: Solutions of this problem should be written in English.

¹ Gdyby dla kogoś wymaganie to było dużym utrudnieniem, można z nami negocjować.