

Prosimy, by oddawać każde zadanie na osobnej, czytelnie podpisaney kartce.

1. Jednotasmowa maszyna Turinga M ma tę własność, że dla każdego wejścia w podczas pierwszych $2 \cdot |w|$ kroków głowica M porusza się tylko w prawo (nie przesuwa się w lewo, ani nie stoi w miejscu); maszyna może też skończyć działanie w dowolnym momencie przed upływem $2 \cdot |w|$ kroków. Udowodnij, że język maszyny M należy do $\mathbf{DTIME}(n)$.
2.
 - a) Udowodnij, że istnieje rodzina obwodów logicznych $(C_{n,k})_{n,k \in \mathbb{N}}$ taka, że $C_{n,k}$ ma $n^2 + k$ wejść oraz n^2 wyjść i oblicza N -tą potęgę macierzy boolowskiej M o wymiarach $n \times n$, gdzie pierwszych n^2 wejść zawiera macierz M , a kolejne k wejść zawiera zapis binarny liczby N (wykonując operacje na komórkach macierzy używamy ANDa jako mnożenia i ORa jako dodawania). Obwody powinny mieć rozmiar wielomianowy i głębokość $O(k)$ (niezależną od n); dozwolone są bramki o dowolnym stopniu wejściowym.
 - b) Jak powyżej, lecz pozwalamy na głębokość $O(k \cdot \log n)$ oraz zakładamy, że tylko bramki o stopniu wejściowym 2 są dozwolone.
3. Udowodnij, że następujący problem jest w $\mathbf{L}$: rozstrzygnij, czy dany graf nieskierowany G o wierzchołkach $1, \dots, n$ ma tę własność, że dla każdych $i, j \in \{1, \dots, n\}$, jeśli $i \leq j$ to $\text{dist}(1, i) \leq \text{dist}(1, j)$. Graf dany jest za pomocą macierzy sąsiedztwa.

Each of the tasks should be solved on a separate, clearly signed sheet of paper.

1. A single-tape Turing machine M has the property that, for every input w , during the first $2 \cdot |w|$ steps, the head of M moves only right (it does not move left nor stays in place); the machine is also allowed to halt at any moment during these first $2 \cdot |w|$ steps. Prove that the language of M is in $\mathbf{DTIME}(n)$.
2.
 - a) Prove that there exists a family of Boolean circuits $(C_{n,k})_{n,k \in \mathbb{N}}$ such that $C_{n,k}$ has $n^2 + k$ inputs, n^2 outputs, and computes the N -th power of a Boolean matrix M of size $n \times n$, where the first n^2 inputs contain the matrix M , and the next k inputs contain the binary encoding of N (while performing operations on matrix entries, AND serves as multiplication, and OR as addition). The circuits should have polynomial size, and depth $O(k)$ (independent on n); gates of arbitrary fan-in are allowed.
 - b) The same as above, but with depth $O(k \cdot \log n)$, when only gates of fan-in 2 are allowed.
3. Show that the following problem is in $\mathbf{L}$: decide whether a given undirected graph G with nodes $1, \dots, n$ has the property that for all $i, j \in \{1, \dots, n\}$, if $i \leq j$ then $\text{dist}(1, i) \leq \text{dist}(1, j)$. The graph is given by its adjacency matrix.