

Wartość Shapleya

Oskar Skibski

Institute of Informatics,
University of Warsaw

8 października 2012

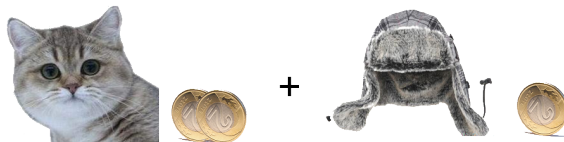
Przykład



Przykład



Przykład



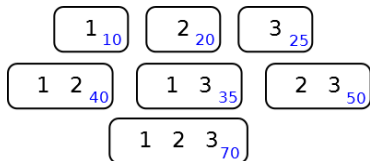
CO TERAS?



Jak podzielić wspólną wypłatę?

- *zbiór graczy* N
- *koalicja* – dowolny podzbiór graczy $S \subseteq N$
- *podział* (lub *układ koalicyjny*) – zbiór rozłącznych koalicji $P = \{S_1, S_2, \dots, S_k\}$ których sumą jest N
- *gra koalicyjna* – funkcja $v : 2^N \rightarrow \mathbb{R}$ która przypisuje każdej koalicji jej wartość (zakładamy, że $v(\emptyset) = 0$).

- *zbiór graczy* N
- *koalicja* – dowolny podzbiór graczy $S \subseteq N$
- *podział* (lub *układ koalicyjny*) – zbiór rozłącznych koalicji $P = \{S_1, S_2, \dots, S_k\}$ których sumą jest N
- *gra koalicyjna* – funkcja $v : 2^N \rightarrow \mathbb{R}$ która przypisuje każdej koalicji jej wartość (zakładamy, że $v(\emptyset) = 0$).



Problem tworzenia koalicji (ang. *Coalition formation problem*)

Znajdź podział $P \in \mathcal{P}(N)$ dla którego $\sum_{S \in P} v(S)$ jest maksymalne.

Problem tworzenia koalicji (ang. *Coalition formation problem*)

Znajdź podział $P \in \mathcal{P}(N)$ dla którego $\sum_{S \in P} v(S)$ jest maksymalne.

Inaczej: jaki układ koalicyjny powstanie?

$$\boxed{1}_{10} + \boxed{2}_{20} + \boxed{3}_{25} = 55$$

$$\boxed{1}_{10} + \boxed{2\ 3}_{50} = 60$$

$$\boxed{2}_{20} + \boxed{1\ 3}_{35} = 55$$

$$\boxed{3}_{25} + \boxed{1\ 2}_{40} = 65$$

$$\boxed{1\ 2\ 3}_{70} = 70$$

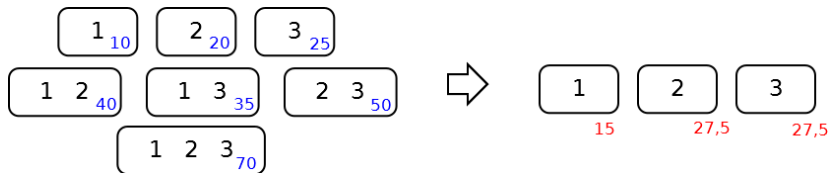
Problem podziału (ang. *Problem of division*)

Założmy, że powstanie *grand coalition*, czyli koalicja wszystkich graczy. Znajdź funkcję $\varphi : \mathbb{R}^{2^N} \rightarrow \mathbb{R}^N$, która przypisuje każdemu graczowi jego udział we wspólnej wypłacie.

Problem podziału (ang. *Problem of division*)

Założmy, że powstanie *grand coalition*, czyli koalicja wszystkich graczy. Znajdź funkcję $\varphi : \mathbb{R}^{2^N} \rightarrow \mathbb{R}^N$, która przypisuje każdemu graczowi jego udział we wspólnej wypłacie.

Inaczej: jak się podzielić tym co uzyskaliśmy?



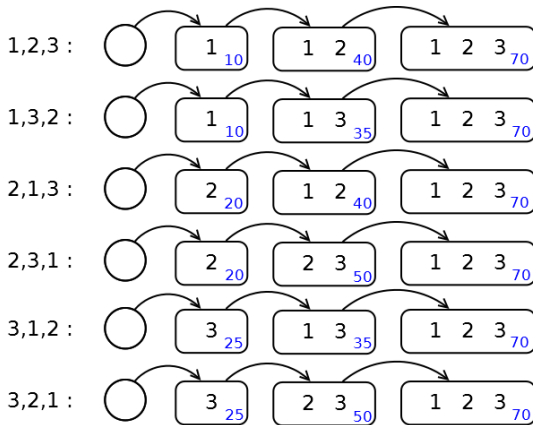
Odpowiedź

Wartość Shapleya:

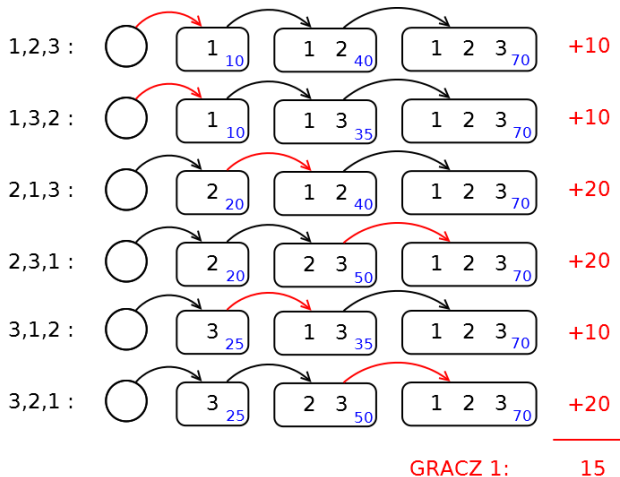
$$Sh_i(v) = \sum_{S \subseteq N, i \in S} \frac{(|S| - 1)! (|N| - |S|)!}{|N|!} (v(S) - v(S \setminus \{i\}))$$

„Założmy, że gracze przychodzą na miejsce spotkania w losowej kolejności. Gracz i zwiększa wartość zastanego zbioru $S \setminus \{i\}$ o swój wkład marginalny $v(S) - v(S \setminus \{i\})$. Jego wartość w grze wyliczamy teraz jako średnią z jego wszystkich wkładów marginalnych po wszystkich porządkach przyjścia graczy.”

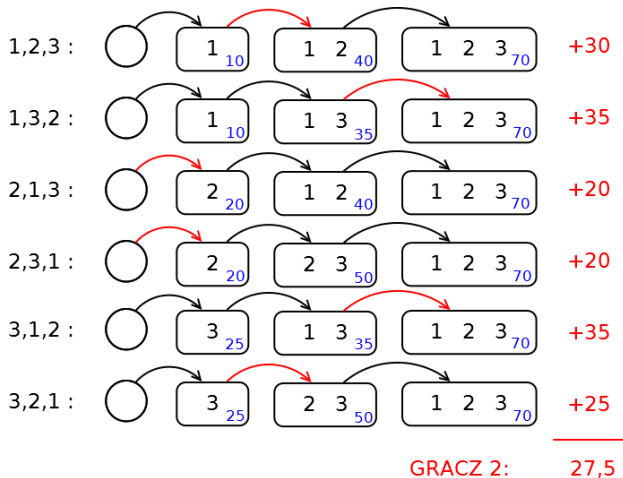
Wartość Shapleya



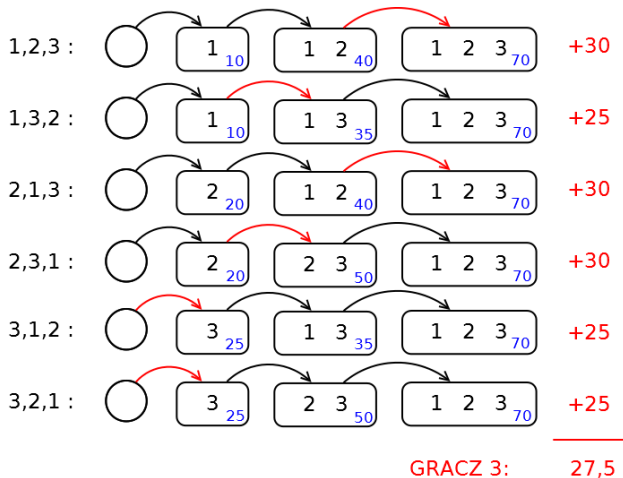
Wartość Shapleya



Wartość Shapleya



Wartość Shapleya



- *Efektywność* – cała wypłata jest rozdzielona pomiędzy graczy

$$\sum_{i \in N} \varphi_i(v) = v(N)$$

- *Symetria* – podział wypłaty nie zależy od imion graczy

$$\varphi(\sigma(v)) = \sigma(\varphi(v))$$

- *Addytywność* – wypłata graczy w dwóch połączonych grach jest równa sumie wypłat w tych grach rozpatrywanych rozłącznie

$$\varphi(v_1 + v_2) = \varphi(v_1) + \varphi(v_2)$$

- *Aksjomat gracza-atrapy* – gracz który nie wnosi nic do wartości żadnej koalicji nic nie dostaje

$$\forall S \subseteq N (v(S) - v(S \setminus \{i\}) = 0) \Rightarrow \varphi_i(v) = 0$$

Twierdzenie (Shapley, 1953)

Wartość Shapleya jest jedyną wartością która spełnia aksjomaty Efektywności, Symetrii, Addytywności oraz Gracza-atrapy.

Dowód

Wartość Shapleya je spełnia (łatwe), pokażemy że jest jedyna.

- 1 znajdź (jedyne) rozbitcie gry $v(R) = \sum_{S \subseteq N} \alpha_S \cdot e_S(R)$ na proste gry e_S postaci: (*addytywność*)

$$e_S(R) = \begin{cases} 1 & \text{jeżeli } S \subseteq R, \\ 0 & \text{wpp;} \end{cases}$$

- 2 wyznacz wypłatę dla gracza $i \notin S$ w grze e_S ; (*aksj. gracza-atrapy*)
- 3 wyznacz wypłatę dla gracza $i \in S$ w grze e_S . (*efektywność, symetria*)

(...) Shapley value, which happens to be calculated as the average of marginal contributions of players to coalitions. This comes as a surprise at first glance: uniqueness is the consequence of four basic axioms, and nothing in those axioms hints at the marginality principle, of long tradition in economic theory. In the clarification of this puzzle, Young (1985) provided a key piece.

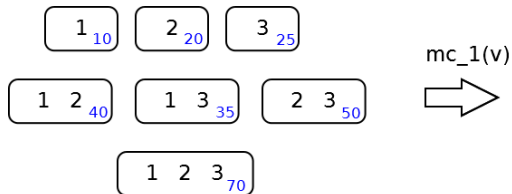
De Clippel & Serrano, Econometrica, 2008

- *Marginalność* – wypłata gracza zależy tylko od jego wektora wkładów marginalnych

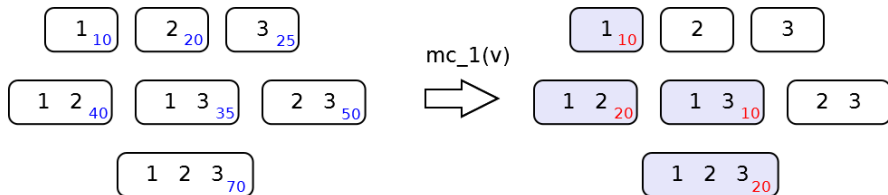
$$mc_i(v_1) = mc_i(v_2) \Rightarrow \varphi_i(v_1) = \varphi_i(v_2)$$

gdzie $mc_i(v) = \langle v(S) - v(S \setminus i) \rangle_{S \subseteq N, i \in S}$.

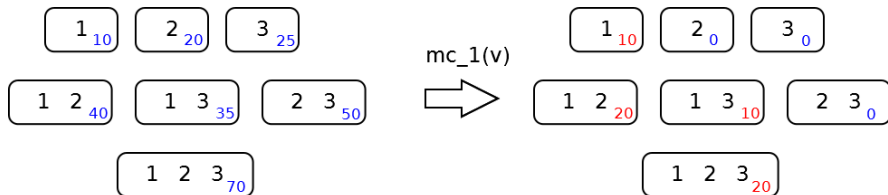
Aksjomat Marginalności



Aksjomat Marginalności

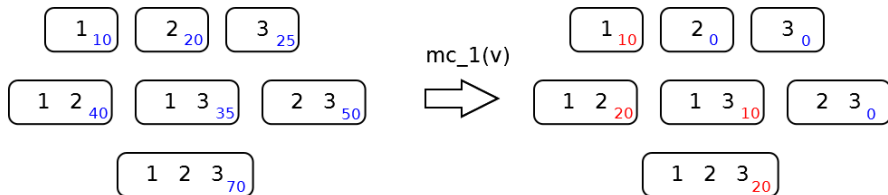


Aksjomat Marginalności



Wniosek: na wektor marginalny możemy patrzeć jak na grę!

Aksjomat Marginalności



Wniosek: na wektor marginalny możemy patrzeć jak na grę!
Co więcej: wektor marginalny w tej grze jest znowu tą samą grą!

Twierdzenie (Young, 1985)

Wartość Shapleya jest jedyną wartością która spełnia aksjomaty Efektywności, Symetrii oraz Marginalności.

Dowód

Wartość Shapleya je spełnia (łatwe), pokażemy że jest jedyną. Zastosujemy odwrotną indukcję po przecięciu wszystkich koalicji z niezerową wartością:

$$\mathcal{S}(v) = \bigcap \{S \mid v(S) \neq 0\}.$$

- 1 podstawa: pokaż, że jeżeli $|\mathcal{S}(v)| = |N|$ to wypłaty graczy łatwo wyznaczyć; (*efektywność, symetria*)
- 2 założenie: jeżeli $|\mathcal{S}(v)| > k$ to wypłaty graczy są jednoznaczne;
- 3 krok: niech $|\mathcal{S}(v)| = k$; pokaż, jak wyznaczyć jednoznacznie wypłatę gracza $i \notin S$ (*marginalność*), a następnie gracza $i \in S$.

Balanced Contributions

Czemu gracze mają się zgodzić na taki podział? Może mogą wytargować więcej od kogoś?

Sprzeciw! (gracza i względem j)

Daj mi więcej, bo odejdę i zamiast Twojej wielkiej wypłaty $\varphi_j(v)$ dostaniesz tylko $\varphi_j(v_{-i})$!

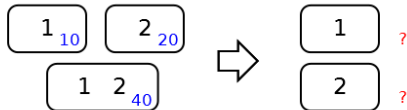
Odpowiedź (gracza j do i)

To prawda, że jak odejdiesz to stracę, ale nie cwaniakuj, bo jak ja odejdę to Ty stracisz $\varphi_i(v) - \varphi_i(v_{-j})$.

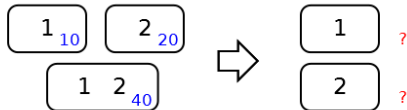
- *Balanced Contributions* – zysk z kooperacji dwóch graczy jest dzielony po równo między nich

$$\varphi_i(v) - \varphi_i(v_{-j}) = \varphi_j(v) - \varphi_j(v_{-i})$$

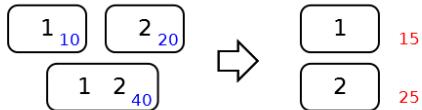
Balanced Contributions



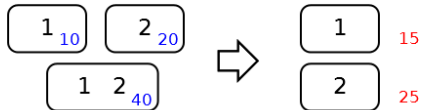
Balanced Contributions



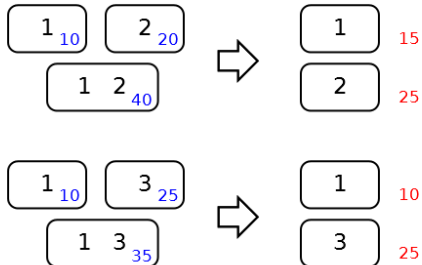
Balanced Contributions



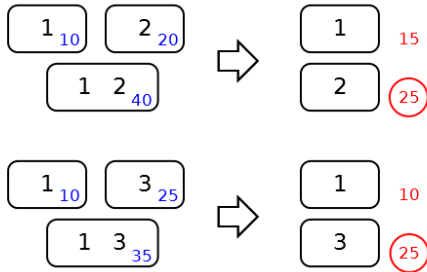
Balanced Contributions



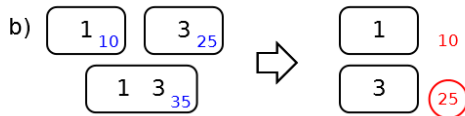
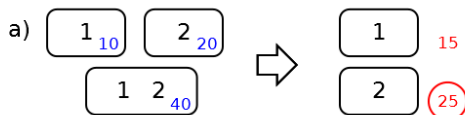
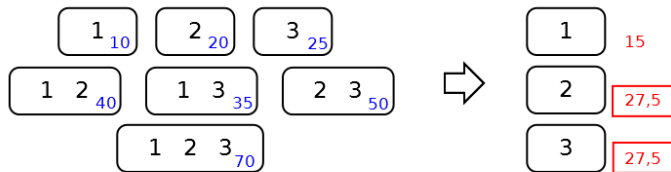
Balanced Contributions



Balanced Contributions



Balanced Contributions



Balanced Contributions

Twierdzenie (Myerson, 1977)

Wartość Shapleya jest jedyną wartością która spełnia aksjomaty Efektywności oraz Balanced Contributions.

Dowód

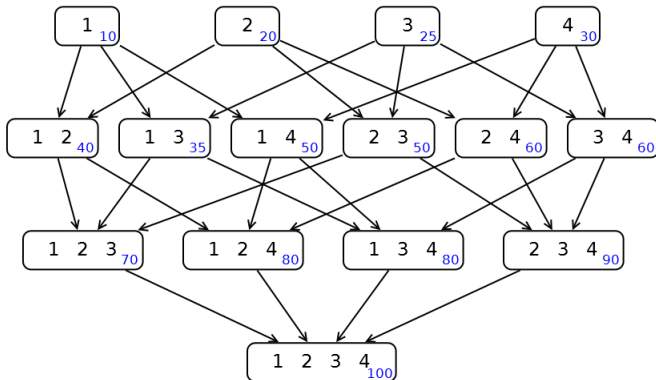
Wartość Shapleya je spełnia (łatwe), pokażemy że jest jedyna. Aby to zrobić wystarczy zsumować nasze równanie przy ustalonym i po wszystkich j .

$$\varphi_i(v) = \sum_j \varphi_j(v) - \varphi_j(v_{-i}) + \varphi_i(v_{-j})$$

Zauważając, że $\sum_j \varphi_j(v) = v(N)$ oraz $\sum_j \varphi_j(v_{-i}) = v(N \setminus \{i\})$ (oba z efektywności) dostajemy równanie rekurencyjne:

$$\varphi_i(v) = v(N) - v(N \setminus \{i\}) + \sum_j \varphi_i(v_{-j}).$$

Balanced Contributions



Balanced Contributions

