

Zadania z Algebry I na 19 i 24 stycznia 2017 r.

Zadanie 1 (egzamin). Niech $R = \mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ oraz $S = \mathbb{Z}_{11}$. Opisz wszystkie homomorfizmy $S \rightarrow R$ oraz $R \rightarrow S$.

Zadanie 2 (egzamin). Niech $I = (2x, x + 3y) \triangleleft \mathbb{Z}[X, Y]$. Czy ideał I jest główny, pierwszy, maksymalny?

Zadanie 3 (egzamin). Niech $R = \mathbb{Z}[\sqrt{-7}]$. Czy R jest dziedziną z jednoznacznością rozkładu? Czy w R istnieje nierozkładalny element $a + b\sqrt{-7}$ taki, że $a^2 + 7b^2$ jest liczbą rozkładalną w \mathbb{Z} ?

Zadanie 4 (egzamin). Czy $\mathbb{Z}[\sqrt{-6}]$ jest dziedziną z jednoznacznością rozkładu?

Zadanie 5. Niech $R = \{f \in \mathbb{Q}[X] \mid f(0) \in \mathbb{Z}\}$. Czy R jest pierścieniem z jednoznacznością rozkładu?

Zadanie 6. Znajdź wszystkie ideały maksymalne w $\mathbb{R}[X]$ i $\mathbb{C}[X]$.

Zadanie 7. Rozłóż wielomian $X^5 - 1$ oraz $X^6 - 1$ na czynniki nierozkładalne w pierścieniu $R[X]$ gdzie $R = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}, \mathbb{Z}_7, \mathbb{Z}_5, \mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_2$.

Zadanie 8. Niech p będzie liczbą pierwszą. Wykaż, że $X^{p-1} + \dots + X + 1$ jest nierozkładalny w $\mathbb{Q}[X]$.

Zadanie 9. Oblicz $NWD(4 - 2i, 9 + 3i)$ w $\mathbb{Z}[i]$ oraz $NWD(X^4 + 4X^3 + 4X^2 + 6, X^3 + 6X + 1)$ w $\mathbb{Z}_7[X]$.

Zadanie 10. Znajdź rozkład na czynniki nierozkładalne $7 - i$ oraz $5 + 9i$ w $\mathbb{Z}[i]$.

Zadanie 11. Sprawdź nierozkładalność $X^n + 991X - 1, n > 1$ w $\mathbb{Q}[X]$ i $\mathbb{Z}[X]$.

Zadanie 12. Sprawdź nierozkładalność $2X^{2009} + 6X^5 - 18X^4 + 30$ w $\mathbb{Q}[X]$ i $\mathbb{Z}[X]$.

Zadanie 13. Wykaż, że $X^3 + 2X^2 - X + 1$ jest nierozkładalny w $\mathbb{Q}[X]$ i $\mathbb{Z}[X]$.

Zadanie 14. Niech R będzie pierścieniem z jednoznacznością rozkładu. Wykaż, że wielomian $f = X^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i X^i \in R[X]$ nie ma pierwiastków w $(R) - R$.

Zadanie 15 (egzamin). Przedstaw $45 - 15i$ jako iloczyn elementów nierozkładalnych w $\mathbb{Z}[i]$. Czy $(3 - i, 8 - i)$ jest maksymalny w $\mathbb{Z}[i]$?

Zadanie 16 (egzamin). Wyznacz elementy nierozkładalne pierścienia $R = \{\frac{f}{g} \in \mathbb{R}(X) \mid g(i) \neq 0\}$.

Zadanie 17 (egzamin). Wykaż, że $3 + i\sqrt{7}$ nie jest elementem pierwszym w $\mathbb{Z}[i\sqrt{7}]$.