Zadania z Algebry I na 15 grudnia 2016 r.

Zadanie 1. Zadania ze stron 64–65 ze skryptu `https://www.mimuw.edu.pl/~aboj/algebra/algfinv1.pdf`

Zadanie 2. Niech R będzie pierścieniem przemiennym z 1, $U(R)$ multyplikatywną podgrupą jedności R oraz niech $a, b \in R$. Wykaż następujące fakty

i) $(a) \subset (b) \iff b \mid a$,

ii) $(a) = R \iff a \in U(R)$,

iii) $(a) = (b) \iff \exists c \in U(R)\ a = cb$,

iv) (a) jest ideałem pierwszym $\iff$ a jest elementem pierwszym (tzn. $a \mid xy \Rightarrow a \mid x$ lub $a \mid y$).

Zadanie 3. Niech $f\colon R \to P$ będzie homomorfizmem pierścieni. Niech $I \lhd R$, $J \lhd P$ będą ideałami.

i) czy $f^{-1}(J)$ jest ideałem w R?

ii) czy $f(I)$ jest ideałem w P?

iii) czy przeciwobraz $f^{-1}(J)$ ideału pierwszego (odp. maksymalnego) J jest ideałem pierwszym (odp. maksymalnym)?

iv) czy obraz $f(I)$ ideału pierwszego (odp. maksymalnego) I jest ideałem pierwszym (odp. maksymalnym) gdy f jest epimorfizmem?

Zadanie 4. Niech R będzie pierścieniem przemiennym z 1. Niech

$$N = \{x \in R \mid \exists n \geq 1\ x^n = 0\}.$$

i) wykaż, że N jest ideałem w R,

ii) wykaż, że

$$N = \bigcap_{\substack{\mathfrak{p} \lhd R \\ \mathfrak{p} \text{ pierwszy}}} \mathfrak{p}.$$

Zadanie 5. Niech $\mathrm{Spec}(R) = \{\mathfrak{p} \lhd R \mid \mathfrak{p} \text{ jest pierwszy}\}$. Dla każdego $I \lhd R$ definiujemy $V(I) = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R) \mid I \subset \mathfrak{p}\}$.

i) wykaż zbiory $\mathrm{Spec}(R) - V(I)$ zadają topologię na $\mathrm{Spec}(R)$,

ii) znajdź punkty domknięte tej topologii,

iii) wykaż, że dla dowolnego homomorfizmu $f\colon R \to P$ odzworowanie $\mathrm{Spec}(P) \ni \mathfrak{q} \mapsto f^{-1}(\mathfrak{q}) \in \mathrm{Spec}(P)$ jest ciągłe.