Zadania z Algebry I na 29 listopada i 1 grudnia 2016 r.

Zadanie 1. Czy grupa $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{16}$ zawiera podgrupy izomorficzne z

i) $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_8$,

ii) $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4$,

iii) $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

Zadanie 2. Wykaż, że jeśli m dzieli rząd grupy przemiennej A, to w A istnieje podgrupa rzędu m.

Zadanie 3. Wyznacz grupy homomorfizmów przemiennych grup (względem dodawania funkcji po współrzędnych)

i) $Hom(\mathbb{Z}_{12}, \mathbb{Z}_{18})$,

ii) $Hom(A_1 \times A_2, A_3)$,

iii) $Hom(A_1, A_2 \times A_3)$,

iv) $Hom(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}_m)$.

Który z podpunktów ii) oraz iii) jest prawdziwy dla grup nieprzemiennych?

Zadanie 4. Ile jest homomorfizmów $\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_{24} \to \mathbb{Z}_{10} \times \mathbb{Z}_{18}$?

Zadanie 5. Wykaż, że podgrupa skończenie generowanej grupy przemiennej jest też skończenie generowana.

Zadanie 6. Dla macierzy $A \in M(m \times n; \mathbb{Z})$ niech $\mathbb{Z}^n/A$ oznacza grupę $\mathbb{Z}^n$ podzieloną przez podgrupę generowana przez wiersze A. Zidentyfikuj $\mathbb{Z}^n/A$ gdy

i) $A = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 8 & -4 \\ 3 & 7 & 6 & -3 \\ 2 & 2 & 4 & 2 \end{bmatrix}$,

ii) $A = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 4 & 8 \\ 3 & 5 & 3 & 6 \\ 5 & 7 & 7 & 10 \end{bmatrix}$,

Znajdź $\mathbb{Z}-$bazę $v_1, \ldots, v_4 \in \mathbb{Z}^4$ i liczby $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{Z}$ takie, że $n_1|n_2|\ldots|n_k$ oraz grupa generowana przez wiersze A jest równa grupie generowanej przez $n_1v_1, \ldots, n_kv_k$. W każdym przypadku wyznacz niezerowy element $v \in \mathbb{Z}^4$, którego obraz w grupie ilorazowej ma skończony rząd.

Zadanie 7. Niech $A = [a_{ij}] \in M(n \times n; \mathbb{Z})$. Wykaż, że $\mathbb{Z}^n/A$ jest grupą skończoną wtedy i tylko wtedy, gdy $\det A \neq 0$ oraz ponadto $|\mathbb{Z}^n/A| = |\det A|$.

Zadanie 8. Ile jest elementów rzędu 5 i 10 w niecyklicznej grupie przemiennej rzędu 50. A w dowolnej cyklicznej skończonej grupie, której rząd jest podzielny przez 10?

Zadanie 9. Niech $N \lhd G$. Wykaż, że jeśli $H \lhd G$ oraz $N \subset H$, to $H/N \lhd G/N$ oraz grupa $(G/N)/(H/N)$ jest izomorficzna z grupą G/H.

Zadanie 10. Wykaż, że jeśli $N \lhd G$ oraz $H < G$ to $N \cap H \lhd H$, $NH < G$, $N \lhd NH$ oraz $H/(N \cap H)$ jest izomorficzna z grupą NH/N.

Zadanie 11. Wykaż, że jeśli $H_i \lhd G_i$ dla $i = 1, \ldots, n$ to $\prod_{i=1}^n G_i / \prod_{i=1}^n H_i = \prod_{i=1}^n G_i/H_i$.

Zadanie 12. Niech p będzie liczbą pierwszą. Ile jest elementów rzędu p^k oraz, odpowiednio, rzędu co najwyżej p^k w A jeśli

i) $A = \mathbb{Z}_{p^n}$ i $k \leq n$,

ii) $A = \mathbb{Z}_{p^n} \times \mathbb{Z}_{p^m}$, gdzie $n \leq m$ oraz $k \leq m$,

iii) $A = \mathbb{Z}_{p^{n_1}} \times \mathbb{Z}_{p^{n_2}} \times \mathbb{Z}_{p^{n_r}}$, gdzie $n_1 \leq \ldots \leq n_r$ i $k \leq n_r$,

Zadanie 13. Wykaż, że dwie skończone grupy przemienne sa izomorficzne wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego m maja taką samą liczbę elementów rzędu m.

Zadanie 14. Wykaż, że liczba nieizomorficznych parami grup przemiennych rzędu q^n, gdzie q jest liczbą pierwszą, jest równa $p(n)$, gdzie

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(n)x^n = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1 - x^k}.$$

Liczbę $p(n)$ nazywa się liczbą podziałów n.

Zadanie 15. Ile jest parami nieizomorficznych grup przemiennych rzędu n?

Zadanie 16. Czy $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \cong \mathbb{Q}$?

Zadanie 17. Czy jeśli $A \times \mathbb{Q} \cong B \times \mathbb{Q}$, to $A \cong B$ gdzie A, B są skończenie generowanymi grupami przemiennymi?