Zadania z Algebry I na 24 listopada 2016 r.

Zadanie 1. Wykaż,że następujące warunki są równoważne:

i) $G = N \rtimes Q$,

ii) $N \triangleleft G, Q < G, NQ = G, N \cap Q = \{1\}$,

iii) $N \triangleleft G, Q < G$ odwzorowanie $\pi|_Q$ jest izomorfizmem gdzie $\pi\colon G \to G/N$.

Zadanie 2. Wykaż, że

i) $D_{2\cdot n} \cong \langle\rho\rangle \rtimes \langle\varepsilon\rangle$,

ii) $S_n \cong A_n \rtimes \mathbb{Z}_2$,

iii) $B = U \rtimes T$ gdzie B to odwracalne macierze górnotrójkątne, U to macierze górnotrójkątne z jedynkami na przekątnej, a T to macierze diagonalne.

Zadanie 3. Wykaż, że Q_8 nie jest nietrywialnym produktem półprostym.

Zadanie 4. Używając produktu półprostego podaj przykład nieprzemiennej grupy rzędu 12 nieizomorficznej z A_4.

Zadanie 5. Ile jest podgrup rzędu p^l w $\mathbb{Z}_p^n$ dla $k = 0, \ldots, n$?

Zadanie 6. Dla macierzy $A \in M(m \times n; \mathbb{Z})$ niech $\mathbb{Z}^n/A$ oznacza grupę $\mathbb{Z}^n$ podzieloną przez podgrupę generowana przez wiersze A. Zidentyfikuj $\mathbb{Z}^n/A$ gdy

i) $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 12 \end{bmatrix}$,

ii) $A = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 7 \\ 8 & 7 & 11 \\ 6 & 5 & 11 \end{bmatrix}$,

iii) $A = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 1 \\ 8 & 9 & 1 \\ 4 & 6 & 2 \end{bmatrix}$

Podaj generatory poszczególnych składników iloczynu.

Zadanie 7. Zidentyfikuj grupę przemienną zadaną przez generatory $x_1, \ldots, x_n$ i relacje $nx_1 + x_2 + \ldots + x_n, x_1 + nx_2 + x_3 + \ldots + x_n, \ldots, x_1 + \ldots + x_{n-1} + nx_n$ dla $n = 2, 3, 4$.

Zadanie 8. Niech $A = [a_{ij}] \in M(n \times n; \mathbb{Z})$ będzie macierzą górnotrójkątną. Wykaż, że $|\mathbb{Z}^n/A| = a_{11} \cdots a_{nn}$.

Zadanie 9. Czy izomorficzne są grupy

i) $\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_{36}$ i $\mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_{18}$,

ii) $\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_{36}$ i $\mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_{24}$.

Zadanie 10. Ile jest elementów rzędu 3 i 6 w niecyklicznej grupie przemiennej rzędu 18. A w dowolnej cyklicznej skończonej grupie, której rząd jest podzielny przez 6?