

Zadania z Algebry I na 15 i 17 listopada 2016 r.

Zadanie 1. Wypisz wszystkie normalne podgrupy $D_{2 \cdot n}$.

Zadanie 2. Wykaż, że jeśli n jest liczbą nieparzystą, to grupa $D_{2 \cdot 2n}$ jest izomorficzna z $\mathbb{Z}_2 \times D_{2 \cdot n}$.

Zadanie 3. i) wypisz klasy sprzężoności i ich moce w A_5 ,

ii) wykaż, że A_5 nie posiada podgrupy normalnej (tzn. jest prosta).

Zadanie 4. Oblicz centrum grupy:

i) diherdalnej $D_{2 \cdot n}$,

ii) grupy permutacji S_n ,

iii) grupy macierzy odwracalnych $GL(n, \mathbb{K})$, gdzie \mathbb{K} to dowolne ciało różne od \mathbb{Z}_2 i $n \geq 2$.

Zadanie 5. Niech $|X| = 13$.

i) wykaż, że działanie G o mocy 9 na X posiada punkt stały,

ii) pokaż działanie \mathbb{Z}_{12} na X bez punktu stałego.

Zadanie 6. Niech N będzie podgrupą normalną G o indeksie n . Wykaż, że $g^n \in N$ dla dowolnego $g \in G$.

Zadanie 7. Niech $G < S_n$. Wykaż, że jeśli G zawiera permutację o nieparzystą to ma podgrupę indeksu 2.

Zadanie 8. Wykaż, że grupa o rzędzie $2n$, gdzie n jest liczbą nieparzystą zawiera podgrupę indeksu 2 (wskazówka: wykaż, zanurzenie w S_{2n} i poprzednie zadanie).

Zadanie 9 (pytanie z egzaminu). Opisz wszystkie homomorfizmy

i) $D_{2 \cdot 5} \longrightarrow \mathbb{Z}_{10}$,

ii) $A_4 \longrightarrow \mathbb{Z}_{12}$.

Zadanie 10 (testowe z egzaminu). Jeśli G jest nieprzemiennej grupą rzędu p^3 to z jaką grupą izomorficzna jest grupa $G/Z(G)$?