

Zadania z Algebry I na 10 listopada 2016 r.

Zadanie 1 (zadanie z egzaminu). Niech $D_{2 \cdot 12} = \langle \rho, \varepsilon \rangle$ będzie grupą symetrii dwunastokąta foremnego.

- i) wykaż, że podgrupa $N = \{1, \rho^3, \rho^6, \rho^9\} < D_{2 \cdot 12}$ jest normalna,
- ii) wypisz wszystkie warstwy względem N ,
- iii) czy G/N jest izomorficzna z \mathbb{Z}_6 ?

Zadanie 2 (pytanie testowe z egzaminu). Znajdź liczbę klas sprzężenia w grupie $D_{2 \cdot 12}$.

Zadanie 3. Wypisz klasy sprzężenia w grupie $D_{2 \cdot n}$. Wypisz podgrupy normalne $D_{2 \cdot n}$.

Zadanie 4 (pytanie testowe z egzaminu). Czy istnieje podgrupa $D_{2 \cdot 12}$ izomorficzna z $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$?

Zadanie 5 (pytanie testowe z egzaminu). Czy istnieje działanie z dokładnie jednym punktem stałym grupy \mathbb{Z}_7 na zbiorze permutacji S_n dla $n > 2$?

Zadanie 6 (pytanie testowe z egzaminu). Czy istnieje działanie \mathbb{Z}_{10} z trzema orbitami na zbiorze \mathbb{Z}_{10} ?

Zadanie 7 (pytanie testowe z egzaminu). Wykaż, że jeśli grupy H i G/H są skończenie generowane, to G jest skończenie generowana.

Zadanie 8. Wykaż, że jeśli $H, K \triangleleft G$ są podgrupami normalnymi i G/H i G/K są przemienne, to $G/(H \cap K)$ jest też przemienna.

Zadanie 9. Wykaż, że jeśli $G < H$ i $[G : H] = p$ jest najmniejszą liczbą pierwszą dzielącą $|G|$ to, $H \triangleleft G$.

Zadanie 10. Czy istnieje grupa skończona, w której elementów rzędu 7 jest dokładnie 18?