Zadania z Algebry I na 3 listopada 2016 r.

Zadanie 1. Wyznacz grupę automorfizmów grupy:

i) $\mathbb{Z}$,

ii) S_3,

iii) $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$,

iv) $D_{2 \cdot 4}$,

v) $\mathbb{Q}$ (grupa kwaternionów).

Zadanie 2. Udowodnij, że podgrupa obrotów o kąt 90 stopni w grupie izometrii ośmiokąta foremnego tworzy podgrupę normalną i zidentyfikuj grupę ilorazową.

Zadanie 3. Wykaż, że $S_4/V_4 \simeq S_3$.

Zadanie 4. Wykaż, że,

i) $o(x) = o(yxy^{-1})$,

ii) $o(xy) = o(yx)$,

iii) podaj przykład, że $o(xyz) \neq o(zyx)$.

Zadanie 5. Wykaż, że podgrupa indeksu 2 jest normalna.

Zadanie 6. Wykaż, że jeśli grupa automorfizmów $\mathrm{Aut}(G)$ grupy G jest cykliczna, to G jest przemienna. Wskazówka: użyj pierwszego zadania z poprzedniej kartki i rozpatrz warstwy względem $Z(G) = \{x \in G \mid xy = yx \text{ dla } y \in G\}$ (centrum grupy G).

Zadanie 7 (*)**.** Wykaż, że jeśli $H \triangleleft G$ to funkcja $\pi : G \to G/H$ zadana wzorem $\pi(g) = gH$ zadaje bijekcję pomiędzy zbiorem podgrup G zawierających H a zbiorem podgrup w G/H. Sprawdź czy bijekcja zachowuje normalność.