Zadania z Algebry I na 27 października 2016 r.

Zadanie 1. Niech G będzie grupą. Dla $g \in G$ niech $f_g : G \longrightarrow G$ będzie odwzorowaniem zadanym wzorem $f_g(x) = gxg^{-1}$. Sprawdź, że f_g jest izomorfizmem. Niech $Aut(G)$ oznacza grupę wszystkich izomorfizmów G. Sprawdź, że odwzorowanie $G \ni g \mapsto f_g \in Aut(G)$ jest homomorfizmem. Opisz jego jądro.

Zadanie 2. Znajdź grupę automorfizmów grupy cyklicznej $\mathbb{Z}_n$. Znajdź n takie, że nie jest ona cykliczna.

Zadanie 3. Jakie są orbity działania przez sprzężenie A_5 na S_5? Jakie są stabilizatory tego działania a jakie punkty stałe?

Zadanie 4 (lemat Burnside'a)**.** Niech skończona grupa G działa na skończonym zbiorze X. Zliczając na dwa sposoby elementy zbioru $\{(g, x) \in G \times X \mid gx = x\}$ udowodnij wzór

$$\text{liczba orbit} = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |X^g|,$$

gdzie $X^g = \{x \in X \mid gx = x\}$.

Zadanie 5. Wykaż, że jeśli $H_1, \ldots, H_n \lhd G$ to $H_1 \cdot H_2 \cdot \ldots \cdot H_n \lhd G$. Pokaż, że następujące warunki są równoważne

i) $G \cong H_1 \times \ldots \times H_n$,

ii) $H_k \lhd G, \quad H_k \cap (H_1 \cdot \ldots \cdot H_{k-1} \cdot H_{k+1} \cdot \ldots \cdot H_n) = \{1\}, \ k = 1, \ldots, n, \quad H_1 \cdot \ldots \cdot H_n = G.$