Zadania z Algebry I na 16 stycznia 2017 r.

Zadanie 1. i) wykazać, że $f = X^3 - X + 1$ jest nierozkładalny w $\mathbb{Z}_3[X]$,

ii) znajdź generatory grupy multiplikatywnej ciała $F = \mathbb{Z}_3[X]/(f)$,

iii) w F oblicz $\frac{X+2}{X+1}$.

Zadanie 2. Niech F będzie ciałem skończonym. Pokazać, że F na p^n elementów gdzie p jest liczbą pierwszą. Wykazać, że moc każdego podciała ciała F, gdzie $|F| = p^n$ jest równa p^m gdzie m dzieli n. Ile jest podciał o mocy p^m w ciele F, gdzie $|F| = p^n$?

Zadanie 3. Wykaż, że ciało $\mathbb{F}_{5^4}$ nie zawiera podciała $\mathbb{F}_{5^3}$.

Zadanie 4. W $\mathbb{F}_{2^6}$ znajdź przecięcie $\mathbb{F}_{2^2} \cap \mathbb{F}_{2^3}$.

Zadanie 5. Znajdź stopień elementów algebraicznych nad $\mathbb{Q}$:

i) $1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}$,

ii) $\sqrt{2} + i$,

iii) $\sqrt[4]{5} + 5$.

Zadanie 6. Znajdź stopień rozszerzeń ciała $\mathbb{Q}$:

i) $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$,

ii) $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, i)$,

iii) $\mathbb{Q}(e^{2\pi i/p})$, gdzie p jest liczą pierwszą,

iv) $\mathbb{Q}(\cos(2\pi/5))$,

v) $\mathbb{Q}(\cos(2\pi/7))$,

vi) $\mathbb{Q}(e^{2\pi i/n})$.

Zadanie 7. Niech $E_n = \mathbb{Q}(2^{\frac{1}{n}})$. Wykaż, że

i) stopień rozszerzenia E_n nad $\mathbb{Q}$ jest równy n,

ii) jeśli m dzieli n, to $E_m \subset E_n$, oblicz stopień tego rozszerzenia,

iii) jeśli n, m są względnie pierwsze to $E_{nm} = \mathbb{Q}(2^{\frac{1}{m}}, 2^{\frac{1}{n}})$,

iv) wyznacz automorfizmy E_n nad $\mathbb{Q}$,

v) wyznacz automorfizmy $\bigcup_{n \geq 1} E_n$ nad $\mathbb{Q}$,

vi) wyznacz 6 podciał E_{12}, które z nich zawiera $2^{\frac{1}{2}} + 2^{\frac{1}{3}}$?