

Zadania z Algebry I na 20 października 2016 r.

Zadanie 1. Wypisz wszystkie podgrupy grupy $D_{2,4}$ (grupa izometrii kwadratu). Które z nich są normalne?

Zadanie 2. Wypisz wszystkie podgrupy grupy Q (grupa kwaternionów). Wykaż, że wszystkie są normalne.

Zadanie 3. Wykaż, że jeśli G jest grupą skończoną oraz $H < G$ gdzie $\frac{|G|}{|H|} = 2$ to H jest podgrupą normalną G .

Zadanie 4 (twierdzenie Cayley'a dla $p = 2$). Wykaż, że jeśli rząd skończonej grupy G jest liczbą parzystą, to G posiada element rzędu 2.

Zadanie 5 (zadanie z egzaminu licencjackiego). Wykaż, że jeśli w grupie G istnieje dokładnie jeden element rzędu n , to $n = 1$ lub $n = 2$.

Zadanie 6 (zadanie z egzaminu z Algebry I). Niech $\varphi : G \rightarrow H$ będzie homomorfizmem grup. Wykaż, że jeśli rząd $x \in G$ jest skończony, to rząd $\varphi(x)$ też jest skończony oraz $o(\varphi(x)) \mid o(x)$.

Zadanie 7. Wykaż, że obraz grupy cyklicznej przez homomorfizm jest grupą cykliczną.

Zadanie 8 (zadanie z egzaminu licencjackiego). Z dokładnością do izomorfizmu opisz wszystkie obrazy grupy \mathbb{Z}_{36} przez homomorfizm.

Zadanie 9 (zadanie z egzaminu z Algebry I). Czy grupa $\mathbb{Z}_3^3 \times \mathbb{Z}_9$ zawiera podgrupę izomorficzną z \mathbb{Z}_9^2 ?

Zadanie 10 (zadanie z egzaminu z Algebry I). Opisz wszystkie homomorfizmy grupy $D_{2,5}$ (grupa izometrii pięciokąta foremnego) w grupę \mathbb{Z}_{10} .

Zadanie 11 (zadanie z egzaminu z Algebry I). Dla dowolnej grupy G definiujemy funkcję $\varphi_n : G \rightarrow G$, gdzie $\varphi_n(x) = x^n$. Wykaż, że φ_2 jest homomorfizmem wtedy i tylko wtedy, gdy G jest grupą przemienną. Podaj przykład nieprzemiennej grupy G takiej, że φ_{20} jest homomorfizmem.

Zadanie 12. Wykaż, że jeśli wszystkie elementy poza jednością w grupie G mają rząd 2, to G jest przemienna.

Zadanie 13. Wykaż, że grupa rzędu 6 jest izomorficzna z \mathbb{Z}_6 albo z S_3 (grupa permutacji zbioru 3-elementowego).

Zadanie 14 (jedno z pytań testowych na egzaminie). Czy grupa $D_{2,6}$ (grupa izometrii sześciokąta) jest izomorficzna z grupą A_4 ?

Zadanie 15 (jedno z pytań testowych na egzaminie). Znajdź maksymalny rząd elementu w A_9 .

Zadanie 16 (jedno z pytań testowych na egzaminie). Czy każda grupa rzędu 45 jest cykliczna?