Matematyka dyskretna 2014

Propozycje na egzamin poprawkowy

Zadanie 1. Udowodnij i znajdź interpretację kombinatoryczną tożsamości dla dowolnego $r \leq k$

$$\sum_{j=r}^{n+r-k} \binom{j-1}{r-1}\binom{n-j}{k-r} = \binom{n}{k}.$$

Odpowiedź: ile jest równy r-ty element wśród k wybranych elementów. Można podać w wersji pewnymi wybranymi k i r.

Zadanie 2. Udowodnij i znajdź interpretację kombinatoryczną tożsamości

$$\sum_{k\geq 0} \binom{n}{2k}\binom{2k}{k} 2^{n-2k} = \binom{2n}{n}.$$

Odpowiedź: wsród n par mężczyzna-kobieta wybieramy n osoób. Liczba wybranych par i niewybranych jest taka sama i równa k.

Zadanie 3. Oblicz moc zbioru

$$\{(A, B) \subset [n] \times [n] \ : \ |A \div B| = k\}$$

gdzie $A \div B = (A \cup B) - (A \cap B)$. Odp. $2^n\binom{n}{k}$.

Zadanie 4. Ile jest kwadratów magicznych 3×3 o wyrazach w liczbach $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ i sumie równej $n = 2$ (lub $n = 3$ jeśli poprzednie za łatwe). Odp. 21.

Zadanie 5. Oblicz moc zbioru $\{a \in [1000] \ : \ \mathrm{NWD}(a, 280) = 7\}$.

Zadanie 6 (b. proste)**.** Talia kart została rozłożona na 13 stosów po 4 karty w każdym. Udowodnij, że można wyciągnąć z każdego stosu dokładnie jedną kartę, tak aby w wyciągniętych kartach każda figura i każda karta numerowana (tzn. $A, 2, \ldots, 9, W, D, K$) pojawiły się dokładnie raz.

Zadanie 7. W grafie dwudzielnym (V_1, V_2) każdy wierzchołek z V_1 ma krotność nieparzystą oraz każde dwa wierzchołki z V_1 są połączone z parzystą liczbą wspólnych wierzchołków z V_2. Wykaż, że istnieje pełne skojarzenie V_1 z V_2.

Zadanie 8 (b. proste)**.** Ile jest wyrazów o długości n złożonych z liter A, B, C, w których nie występują AA i BB?

Zadanie 9. Ułóż równanie rekurencyjne na liczbę ciągów zerojedynkowych, w których obok każdej jedynki stoi co najmniej jedna jedynka. Odp. $x^3 = 2x^2 - x + 1$ i ma niewymierne rozwiązania. Ew. jedynki stoją w grupach co najmniej po $3, 4, \ldots$ ale pierwiastki nadal niewymierne.

Zadanie 10. W czworościanie foremnym wycięto czworościan foremny utworzony przez połączenie środków krawędzi a następnie powtórzono tę czynność na otrzymanych czterech, mniejszych czworościanach. Na ile geometrycznie nierozróżnialnych sposobów można pokolorować czworościany tak otrzymanej bryły?

Zadanie 11. Ile jest różnych naszyjników o 12 paciorkach w n kolorach?

Zadanie 12. Wykaż, że graf G o własności $\chi(G) = 3$ oraz $\chi(G - e) = 2$ dla dowolnej krawędzi w G jest cyklem o nieparzystej liczbie wierzchołków wraz z izolowanymi wierzchołkami.

Zadanie 13. Wykaż, że liczba chromatyczna grafu stworzonego przez wierzchołki $n-$kąta foremnego połączonego z jego środkiem wynosi 3 dla n parzystego i 4 dla n nieparzystego.

Zadanie 14. Wykaż, że wielościan wypukły o co najwyżej 11 ścianach ma ścianę o co najwyżej 4 krawędziach.

Zadanie 15. W zawodach szachowych wzięło udział $2n$ zawodników. Wśród każdych 3 zawodników co najmniej dwóch rozegrało partię szachów.

i) wykaż, że jeśli v jest pewnym zawodnikiem a A_v zbiorem zawodników, którzy grali z v a B_v zbiorem zawodników, którzy nie grali z v, to B_v jest kliką,

ii) wykaż, że jeśli c oznacza liczbę par zawodników w zbiorze A_v, którzy rozegrali ze sobą partię, to liczba partii rozegranych pomiędzy zbiorami A_v i B_v jest nie mniejsza niż $\frac{c(2n-1-|A_v|)}{|A_v|-1}$,

iii) wykaż, że minimalna liczba partii w zawodach jak wyżej wynosi $n(n-1)$,

iv) wskaż konkretne zawody spełniające to minimum.