Matematyka dyskretna 2014

Propozycje na egzamin

Zadanie 1. Oblicz moc zbioru

$$\{(A, B) \subset [n] \times [n] \ : \ |A \div B| = k\}$$

gdzie $A \div B = (A \cup B) - (A \cap B)$. Odp. $2^n \binom{n}{k}$.

Zadanie 2. Ile jest kwadratów magicznych 3×3 o wyrazach w liczbach $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ i sumie równej $n = 2$ (lub $n = 3$ jeśli poprzednie za łatwe). Odp. 21.

Zadanie 3. Oblicz moc zbioru $\{a \in [1000] \ : \ \mathrm{NWD}(a, 280) = 7\}$.

Zadanie 4. (zadanie z IMO 1979) Żaba skacze z wierzchołka ośmiokąta foremnego przeskakując na jeden z wierzchołków sąsiednich. Oblicz na ile sposobów może skoczyć żaba na wierzchołek przeciwległy do startowego w dokładnie n skokach (nie osiągając go wcześniej). Odp. nalezy ulozyc uklad rownan gdzie zmienne to liczba sposobow na doskoczenie do kazdego z 8 wierzcholkow osmiokata w n krokach. Wartosci zmiennych sa symetryczne wzgledem osi przechodzacej przez startowy i koncowy wierzcholek.

Zadanie 5. Kwadrat podzielono na n^2 kwadratów. Na ile geometrycznie różnych sposobów można pomalować małe kwadraty na biało i czarno?

Zadanie 6. (dość skomplikowane) Z urny zawierającej n ponumerowanych kul losujemy kulę ze zwracaniem aż każda kula zostanie wylosowana co najmniej raz. Jaka jest oczekiwana liczba losowań?

Zadanie 7. Ile jest ciągów $n = 3, 4$ elementowych podzbiorów zbioru $[n]$ nie posiadających transwersali?

Zadanie 8. Wielościan wypukły posiada 32 ściany trójkątne, pewną liczbę ścian czworokątnych a każdy wierzchołek jest stopnia 5. Ile krawędzi ma ten wielościan? Odp. 60.

Zadanie 9. W zawodach szachowych wzięło udział $2n$ zawodników. Wśród każdych 3 zawodników co najmniej dwóch rozegrało partię szachów.

i) wykaż, że jeśli v jest pewnym zawodnikiem a A_v zbiorem zawodników, którzy grali z v a B_v zbiorem zawodników, którzy nie grali z v, to B_v jest kliką,

ii) wykaż, że jeśli c oznacza liczbę par zawodników w zbiorze A_v, którzy rozegrali ze sobą partię, to liczba partii rozegranych pomiędzy zbiorami A_v i B_v jest nie mniejsza niż $\frac{c(2n-1-|A_v|)}{|A_v|-1}$,

iii) wykaż, że minimalna liczba partii w zawodach jak wyżej wynosi $n(n-1)$,

iv) wskaż konkretne zawody spełniające to minimum.