

Matematyka dyskretna

Zadania domowe na 13 maja 2014 r.

Krotność wierzchołka v to liczba krawędzi wychodząca z v , oznaczamy ją przez $d(v)$. Drzewo to spójny graf bez cykli. Wszystkie rozważane grafy są proste (bez pętli i wielokrotnych krawędzi). Most to krawędź w grafie, której usunięcie powoduje zwiększenie liczby składowych.

Zadanie 1. W grupie kn osób każda osoba zna więcej niż $(k - 1)n$ innych. Udowodnij, że można z tej grupy wybrać $k + 1$ osób, z których każde dwie się znają (istnieje klika $(k + 1)$ -osobowa).

Zadanie 2. Wykaż, że liczba nieizomorficznych drzew na n wierzchołkach z oznaczonymi krawędziami wynosi n^{n-3} .

Zadanie 3. Wykaż, że w kodzie Prüfera drzewa T wierzchołek v występuje $d(v) - 1$ razy.

Zadanie 4. Podaj charakteryzację drzew, których kody Prüfera są ciągami stałymi (odp. ciągami różnowartościowymi). Ile jest takich drzew?

Drzewem spinającym spójnego grafu G nazywamy podgraf powstały przez usunięcie krawędzi z każdego cyklu. Rozcięcie G to minimalny zbiór rozspajający G .

Zadanie 5. Niech G będzie grafem spójnym. Wykaż, że każde rozcięcie G ma krawędź wspólną z każdym drzewem spinającym G . Wykaż, że każdy cykl w G ma krawędź wspólną z dopełnieniem każdego drzewa spinającego G w G .

Zadanie 6. Wykaż, że graf, którego każdy wierzchołek ma stopień co najmniej k zawiera podgraf izomorficzny z dowolnym drzewem o k krawędziach.

Zadania dodatkowe

Zadanie 7. Ile jest drzew spinających w grafie pełnym na n wierzchołkach?