Matematyka dyskretna

Zadania domowe na 29 kwietnia 2014 r.

Krotność wierzchołka v to liczba krawędzi wychodząca z v, oznaczamy ja przez $d(v)$. Drzewo to spójny graf bez cykli. Wszystkie rozważane grafy są proste (bez pętli i wielokrotnych krawędzi). Most to krawędź w grafie, której usunięcie powoduje zwiększenie liczby składowych.

Zadanie 1. Wykaż, że dla grafu T o n wierzchołkach następujące warunki są równoważne:

i) T jest drzewem,

ii) T jest spójny i ma $n-1$ krawędzi,

iii) T jest acykliczny i ma $n-1$ krawędzi,

iv) T jest grafem pełnym dla $n = 1, 2$ a dla $n > 2$ graf T nie jest pełny i dodanie jakiejkolwiek krawędzi tworzy dokładnie jeden nowy cykl.

Zadanie 2. Turniej to pełny graf, w którym każdej krawędzi nadano kierunek. Udowodnij, że w turnieju istnieje skierowany cykl hamiltonowski albo wierzchołki grafu można podzielić na dwa zbiory A i B tak, że krawędzie pomiędzy A i B mają ten sam kierunek.

Zadanie 3. Niech G będzie grafem hamiltonowskim takim, że każdy wierzchołek ma stopień trzy. Wykaż, że krawędzie grafu można pokolorować trzema kolorami (tak aby przy każdym wierzchołku schodziły się trzy różne kolory).

Zadanie 4 (egzamin)**.** Wykaż, że w każdym turnieju istnieje gracz, który pośrednio wygrał z każdym zawodnikiem (tzn. istnieje A, który dla każdego B wygrał B lub wygrał z C, który wygrał z B).

Zadanie 5 (Algorytm Fleury'ego)**.** Algorytm znajduje cykl eulerowski w grafie eulerowskim: zaczynamy od dowolnego wierzchołka i idziemy do innego, dowolnego wierzchołka wymazując użytą krawędź stosując regułę - nigdy nie wybieramy mostu w niewymazanym grafie chyba, że nie mamy innego wyboru. Wykaż poprawność algorytmu.

Zadania dodatkowe

Zadanie 6. Wykaż, że graf eulerowski nie ma mostu.

Zadanie 7. Niech G będzie grafem o $2d + 1$ wierzchołkach o krotności d. Wykaż, że G jest eulerowski.

Zadanie 8. Dopełnienie grafu G to graf $\overline{G}$ zbudowany na wierzchołkach G z dokładnie tych krawędzi, które nie występują w G. Znajdź graf eulerowski, którego dopełnienie jest/nie jest eulerowskie.

Zadanie 9. Wykaż, ze jeśli najdłuższy cykl w spójnym grafie nie hamiltonowskim G ma długość k to istnieje ścieżka (kolejne wierzchołki różne) o długości co najmniej k. Jaką długość mają najdłuższy cykl i najdłuższa ścieżka w grafie hamiltonowskim o n wierzchołkach?

Zadanie 10. Niech G będzie grafem o n wierzchołkach bez ścieżki o długości $k \geq 1$. Wykaż, że liczba krawędzi w grafie G jest mniejsza lub równa od $(k-1)n/2$. Wykaż, że równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie składowe są zupełnymi grafami o k wierzchołkach (graf zupełny to taki, którego każde dwa wierzchołki są połączone krawędzią).