

Matematyka dyskretna
Zadania domowe na 1 kwietnia 2014 r.

Wprowadźmy oznaczenia:

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n}.$$

Zadanie 1. Znaleźć zwieszłą postać funkcji tworzącej dla następujących ciągów (gdzie $c \in \mathbb{C}$ jest stałą)

- i) $f(n) = c^n$,
- ii) $f(n) = cn$,
- iii) $f(n) = n^2$,
- iv) $f(n) = nc^n$.

Wskazówka: jak wyglądają pochodne $\frac{1}{1-x}$?

Zadanie 2. Wyrazić funkcję tworzącą dla ciągu g przez funkcję tworzącą dla ciągu f jeśli

1. $g(n) = nf(n)$,
2. $g(n) = \sum_{i=0}^n f(i)$,
3. $g(n) = f(n-k)$ dla $n \geq k$ oraz $g(n) = 0$ dla pozostałych.

Zadanie 3. Znajdź funkcję tworzącą dla H_n .

Zadanie 4. Wykaż, że wykładniczymi funkcjami tworzącymi dla liczby nieporządków i dla liczby inwolucji (permutacji, których kwadrat jest identycznością) są odpowiednio $\frac{1}{e^x(1-x)}$ oraz $e^{x+\frac{x^2}{2}}$.

Zadanie 5. Znajdź funkcję tworzącą dla ciągu $a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2} + 1$ gdzie $a_0 = 1, a_1 = 1$. Wyprowadź wzór na a_n .

Zadania dodatkowe

Zadanie 6. Wyprowadź funkcję tworząca dla liczb Catalana.

Zadanie 7. Zadania dodatkowe z poprzedniej kartki.