Matematyka dyskretna

Zadania domowe na 25 marca 2014 r.

Zadanie 1. Na ile sposobów można rozmieścić a białych, b czarnych, c czerwonych kul w n rozróżnialnych urnach?

Zadanie 2. Na ile sposobów można rozmieścić n kul w k rozróżnialnych urnach w każdym z przypadków:

i) nie ma pustej urny,

ii) w pierwszej urnie jest więcej kul niż w drugiej,

iii) w pierwszej urnie znajduje sie m kul,

iv) w i-tej urnie znajduje się dokładnie m_i kul dla wszystkich $i \leq K$, gdzie $K < k$,

v) w i-tej urnie znajduje się co najmniej m_i kul dla $i = 1, \ldots, k$,

vi) w i-tej urnie znajduje sie co najwyżej m_i kul dla $i = 1, \ldots, k$?

Zadanie 3. To samo co wyżej tylko dodatkowo kule są rozróżnialne.

Zadanie 4. Na ile sposobów można rozwiązać równanie $x_1 + \ldots + x_k = n$ z warunkiem w każdym z następujących przypadków:

i) $x_i \geq 0$,

ii) $x_i \geq 1$,

iii) $2 \leq x_i \leq n - 1$.

Zadanie 5. Wykaż, że

$$p_k(n) = p_{k-1}(n-1) + p_k(n-k),$$

$$p_k(n) = p_k(n-k) + p_{k-1}(n-k) + \ldots + p_1(n-k).$$

Podaj wzór na $p_2(n)$. Spróbuj wyprowadzić wzór na $p_3(n)$.

Zadania dodatkowe

Zadanie 6. Na ile sposobów można wydać 50 PLN w różny sposób w banknotach i monetach po $2, 5, 10$ PLN jeśli:

i) każdego nominału używamy co najmniej raz,

ii) każdego nominału używamy co najwyżej 4 razy,

iii) monet używamy co najmniej 2 razy,

iv) bez żadnych ograniczeń.

Zadanie 7. Wykaż tożsamość:

$$\prod_{i=1}^{\infty}(1-x^i) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k(x^{(3k^2-k)/2} + x^{(3k^2+k)/2}).$$

Wskazówka: znaleźć interpretacje współczynnika jako liczbę podziałów na parzystą liczbę różnych części minus liczba podziałów na nieparzystą liczbę różnych części. Znaleźć bijekcję między takimi podziałami, która zachodzi oprócz pewnych wyjątkowych przypadków.

Zadanie 8. Niech

$$S_m(x_1,\ldots,x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i^m,$$

$$\sigma_m(x_1,\ldots,x_n) = \sum_{1\le i_1<\ldots<i_m\le n} x_{i_1}x_{i_2}\cdot\ldots\cdot x_{i_m}.$$

Przyjmujemy, że $\sigma_0 = 1$. Udowodnić wzór Waringa:

$$\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\sigma_m(x_1,\ldots,x_n)z^m = \exp\left(-\sum_{j=1}^{\infty}S_j(x_1,\ldots,x_n)\frac{z^j}{j}\right).$$

Zadanie 9. Niech $\pi(n)$ oznacza zbiór nieuporządkowanych podziałów n. Jeśli $\pi \in \pi(n)$ jest podziałem n na k_i części o mocy i, czyli $n = 1k_1 + 2k_2 + \ldots + nk_n$, to przez $k(\pi) = k_1 + \cdots + k_n$ oznaczamy liczbę różnych części tego podziału. Wykazać, że

$$\exp\left(\frac{xy}{1-x}\right) - 1 = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{\pi\in\pi(n)}\frac{y^{k(\pi)}}{k_1!k_2!\cdots k_n!}\right)x^n.$$

Zadanie 10. Niech $P(x) = \sum_{n\ge 0} P(n)x^n$ gdzie $P(n) = p_n(n) + \ldots + p_1(n)$ (przyjmujemy $P(0) = 1$). Wykaż, że

$$\frac{xP'(x)}{P(x)} = \sum_{n=1}^{\infty}\sigma(n)x^n,$$

gdzie $\sigma(n) = \sum_{d|n} d$.