Matematyka dyskretna

Zadania domowe na 18 marca 2014 r.

Wprowadźmy oznaczenia:

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n},$$
$$(x)_n = x(x-1)(x-2)\ldots(x-n+1),$$
$$(x)^n = x(x+1)(x+2)\ldots(x+n-1),$$
$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \text{liczba permutacji n-elementowych o dokładnie k cyklach},$$
$$\begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix} = \text{liczba podziałów zbioru n-elementowego na k niepustych podzbiorów}.$$

Równoważnie, są to liczby Stirlinga pierwszego i drugiego rodzaju.

Zadanie 1. Udowodnij tożsamość i znajdź interpretację kombinatoryczną:

$$\begin{bmatrix} n+1 \\ k+1 \end{bmatrix} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} i! \begin{bmatrix} n-i \\ k \end{bmatrix}.$$

Zadanie 2. Obliczyć $\left[{n \atop 1}\right]$, $\left[{n \atop n-3}\right]$, $\left[{n \atop n-2}\right]$, $\left[{n \atop n-1}\right]$, $\left[{n \atop n}\right]$.

Zadanie 3. Udowodnij tożsamości

$$(x)^n = \sum_{m=1}^{n} \begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix} x^m,$$

$$(x)_n = \sum_{m=1}^{n} (-1)^{m+n} \begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix} x^m.$$

Znajdź ich kombinatoryczne interpretacje.

Zadanie 4. Wykaż, że

$$\sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} k \\ m \end{Bmatrix} (-1)^k = (-1)^n \delta_{m,n},$$

$$\sum_{k=0}^{n} \begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} k \\ m \end{bmatrix} (-1)^k = (-1)^n \delta_{m,n}.$$

Czy potrafisz znaleźć interpretację kombinatoryczną?

Zadanie 5. Udowodnij tożsamość

$$\begin{bmatrix} n+1 \\ 2 \end{bmatrix} = n! H_n.$$

Zadania dodatkowe

Zadanie 6. Udowodnij tożsamość dla $n \geq 1$,

$$\begin{bmatrix} n+1 \\ 2 \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^{n} k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}.$$

Wskazówka: jak sklejać k cykli, wyróżniając jeden z nich, aby dostać permutację o dwóch cyklach?

Zadanie 7. Wykaż, że dla $m, n \geq 0$

$$\sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} 2^k = (n+1)!.$$