Matematyka dyskretna

Zadania domowe na 11 marca 2014 r.

$$\left\{ {n \atop k} \right\} = \text{liczba podziałów zbioru n-elementowego na k niepustych podzbiorów.}$$

Zadanie 1. Wykaż, że $\left\{ {n \atop 2} \right\} = 2^{n-1} - 1$ oraz $\left\{ {n \atop n-1} \right\} = \binom{n}{2}$.

Zadanie 2. Na ile sposobów można rozstawić n wież na klasycznej tablicy szachowej $n \times n$, zawierającej co najmniej jeden narożnik biały, które nie atakują się wzajemnie, wyłącznie na

i) polach białych,

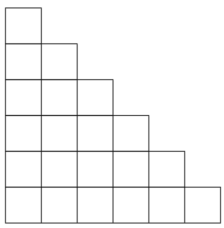
ii) polach czarnych.

Zadanie 3. Niech będzie dana tablica

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{bmatrix}$$

Na ile sposobów można dopisać trzeci wiersz składający się z permutacji liczb $1, 2, 3, 4, 5$ tak, aby liczby w żadnej kolumnie się nie powtarzały.

Zadanie 4. Wykazać, że wielomian szachowy (wieżowy) następującej tablicy



(n pól w pionie po lewej i n pól w poziomie na dole) jest równy

$$1 + \left\{ {n+1 \atop n} \right\} x + \left\{ {n+1 \atop n-1} \right\} x^2 + \left\{ {n+1 \atop n-2} \right\} x^3 + \ldots + \left\{ {n+1 \atop 1} \right\} x^n.$$

Zadanie 5. Niech B będzie pewną $n \times n$ tablicą oraz niech N_i oznacza liczbę ustawień n nie atakujących się wież na tablicy, w taki sposób, że dokładnie i wież stoi na dozwolonych polach. Wykaż, że jeśli wielomian szachowy (wieżowy) dla B jest równy

$$1 + r_1 x + \cdots + r_n x^n,$$

to zachodzi związek

$$\sum_{j=0}^{n} N_j x^j = \sum_{k=0}^{n} r_k (n-k)!(x-1)^k.$$

Wskazówka: zliczaj na dwa sposoby pary ((dowolne rozstawienie n nie atakujących się wież), (podzbiór k-elementowy dozwolonych pól zajmowanych przez wieże)). Wykorzystując powyższy wynik znajdź wzór na r_k w terminach N_j i na odwrót. Udowodnij twierdzenie o związku wiodącego współczynnika wielomianu szachowego dopełnienia tablicy B ze współczynnikami wielomianu szachowego dla B.

Zadanie 6. Znaleźć wielomian szachowy (wieżowy) dla całej tablicy $n \times n$ (tzn. wieże można ustawiać na dowolnych polach).

Zadanie 7. Wyprowadź wzór na eksponencjalną funkcję tworzącą dla liczb Bella:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} x^n = e^{e^x - 1}.$$

Zadania dodatkowe

Zadanie 8. Udowodnij tożsamość i znajdź jej kombinatoryczną interpretację:

$$\left\{ {m+n+1 \atop m} \right\} = \sum_{k=0}^{m} k \left\{ {n+k \atop k} \right\}.$$

Zadanie 9. Udowodnij, że dla $k \geq 0$ oraz dostatecznie małego $x \in \mathbb{R}$ (jak małego?) zachodzi wzór:

$$\sum_{n \geq 0} \left\{ {n \atop k} \right\} x^n = \frac{x^k}{(1-x)(1-2x)(1-3x)\dots(1-kx)}.$$

Zadanie 10. (egzamin 3 czerwca 2005 r.) Udowodnij tożsamość:

$$\sum_{i=k}^{n} \binom{n}{i} \left\{ {i \atop k} \right\} = \left\{ {n+1 \atop k+1} \right\}.$$

Zadanie 11. Wykaż, że dla $m, n \geq 0$

$$\sum_{k=0}^{n} \left\{ {k \atop m} \right\} (m+1)^{n-k} = \left\{ {n+1 \atop m+1} \right\}.$$

Zadanie 12. Udowodnij tożsamośc:

$$\sum_{n,k=0}^{\infty} \left\{ {n \atop k} \right\} \frac{x^n y^k}{n!} = e^{y(e^x - 1)}.$$

Zadanie 13. Wskaż dowolnie dużą tablicę, której wielomian szachowy ma postać $1 + 3x + x^2$. Czy każdy wielomian f o współczynnikach naturalnych, spełniający warunek $f(0) = 1$, jest szachowy dla odpowiednio dużej tablicy? Które wielomiany stopnia 2 są szachowe?