Matematyka dyskretna

Zadania domowe na 3 czerwca 2014 r.

Zadanie 1 (problem haremu)**.** Niech A i B będą dwoma, rozłącznymi zbiorami osób. Przypuśćmy, że każda osoba a należąca do zbioru A chce poślubić (na raz) co najmniej $n_a \geq 1$ osób ze zbioru B. Jaki jest warunek konieczny i wystarczający aby ten problem miał rozwiązanie?

Zadanie 2. Przypuśćmy, że każda osoba ze zbioru A zna dokładnie r osób ze zbioru B oraz każda osoba ze zbioru B zna dokładnie r osób ze zbioru A. Wykazać, że problem małżeństw ma rozwiązanie.

Zadanie 3 (egzamin)**.** Załóżmy, że m i k są liczbami naturalnymi takimi, że $m \geq k+1$. Definiujemy graf dwudzielny $G = (V_1, V_2, E)$, którego wierzchołkami są pewne podzbiory zbioru $[2m]$, w następujący sposób:

$$V_1 = \{A \subset [2m] \ : \ |A| = k\},$$

$$V_2 = \{B \subset [2m] \ : \ |B| = k+1\},$$

$$\text{jeśli } A \in V_1 \text{ i } B \in V_2, \text{ to } \{A, B\} \in E \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } A \subset B.$$

Udowodnij, że w grafie G istnieje skojarzenie pełne z V_1 do V_2.

Zadanie 4. Niech P będzie tablicą o m wierszach i n kolumnach gdzie $m < n$ taką, że w każdym wierszu występują wszystkie liczby od 1 do n a w kolumach liczby są różne. Wykaż, że można dopisać kolejny wiersz tak aby powyższa własność została zachowana.

Zadanie 5. Wykaż, że A jest macierzą rzeczywistą $n \times n$, o nieujemnych wyrazach, której każdy wiersz i każda kolumna sumują sie do 1 wtedy i tylko wtedy gdy jest kombinacja wypukłą macierzy permutacyjnych (macierz $B = (b_{ij})_{i,j=1\ldots,n}$ jest permutacyjna, jeśli istnieje permutacja zbioru n-elementowego σ taka, że $b_{i\sigma(i)} = 1$ oraz $b_{ij} = 0$ w pozostałych przypadkach). Wskazówka: wykaż, że od każdej takiej macierzy można odjąć niezerową macierz permutacyjną.

Zadanie 6. Załóżmy, że zbiór S został podzielony na dwa sposoby na m rozłącznych niepustych zbiorów oznaczanych odpowiednio przez $A_1, \ldots, A_m$ oraz $B_1, \ldots, B_m$. Załóżmy, że suma dowolnych k zbiorów A_i zawiera nie więcej niż k zbiorów B_j. Wykaż, że istnieje wspólny system reprezentantów (transwersala) dla obu podziałów. Wywnioskuj, że dla dowolnej skończonej grupy G i jej podgrupy H istnieje system reprezentantów warstw lewostronnych i prawostronnych. Wskazówka: wykaż, że istnieje transwersala dla rodziny $S_i = \{j \ : \ A_i \cap B_j \neq \emptyset\}$.

Zadania dodatkowe

Zadanie 7. Ile jest różnych transwersal dla następujących rodzin zbiorów:

i) $S_i = [n] - \{i\}$ dla $i = 1, \ldots, n$

ii) $S_i = \{i, i+1\}$ dla $i = 0, \ldots, n-1$ (dodawanie modulo n).

Zadanie 8 (Twierdzenie Koeniga)**.** Nie A będzie macierzą. Wykaż, że minimalna liczba wierszy i kolumn, które zawierają wszystkie niezerowe elementy macierzy A jest równa maksymalnej liczbie niezerowych elementów, z których żadne dwa nie leża w tej samej kolumnie lub w tym samym wierszu.

Zadanie 9. Wyprowadź twierdzenie Halla bezpośrednio z twierdzenia Koeniga.

Zadanie 10. Wykaż, że jeśli kwadratowa macierz $n \times n$ posiada zerową podmacierz o wymiarach $s \times t$ tak, że $s + t > n$ to jej wyznacznik jest równy 0. Znajdź także dowód nie odwołujący się do twierdzenie Koeniga.