Matematyka dyskretna

Zadania domowe na 14 maja 2013 r.

Niech $\chi(G)$ oznacza liczbę chromatyczną grafu G, tj. najmniejszą liczbę kolorów potrzebnych do pokolorowania wierzchołków G tak aby żadna krawędź G nie łączyła wierzchołków tego samego koloru. Przez $p_G(k)$ oznaczamy liczbę rożnych kolorowań wierzchołków grafu k kolorami jak wyżej. Niech $\Delta(G)$ oznacza największą krotność wierzchołka w G. Przez $\overline{G}$ oznaczamy dopełnienie grafu G.

Zadanie 1. Algorytm zachłanny kolorowania wierzchołków grafu G polega na ustawieniu wierzchołków G w ciąg $v_1, \ldots, v_n$ oraz pokolorowaniu v_1 kolorem 1, pokolorowaniu v_2 kolorem 1 jeśli v_1, v_2 nie są połączone krawędzią albo kolorem 2 w przeciwnym przypadku. Za każdym razem używamy najmniejszego możliwego koloru.

Korzystając z powyższego algorytmu, wykaż, że $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$.

Zadanie 2. Wykaż, że istnieje uporządkowanie wierzchołków grafu G takie, że algorytm zachłanny daje optymalne pokolorowanie.

Zadanie 3. Niech u, v bedą wierzchołkami grafu G, które nie są połączone krawędzią. Niech G' oznacza graf G z dodaną krawędzią uv a G'' (prosty) graf G w którym wierzchołki u i v zostały utożsamione. Wykaż, że

$$p_G(k) = p_{G'}(k) + p_{G''}(k),$$

$$\chi(G) = \min\{\chi(G'), \chi(G'')\}$$

.

Zadanie 4. Niech G będzie grafem o n wierzchołkach m krawędziach i k składowych. Wykaż, że

$$p_G(x) = \sum_{i=0}^{n-k} (-1)^i a_i x^{n-i},$$

gdzie $a_0 = 1$, $a_1 = m$ a pozostałe a_i sa liczbami całkowitymi dodatnimi. Wskazówka: można użyć indukcja na $n + m$ i powyższego zadania.

Zadanie 5 (egzamin)**.** Udowodnij (nie odwołując się do twierdzenia o 4 barwach!), że każdy graf planarny, który ma co najwyżej 4 wierzchołki stopnia co najmniej 5, jest 4-kolorowalny.

Zadania dodatkowe

Zadanie 6. Wykaż, że dla grafu G o n wierzchołkach

$$\chi(G) + \chi(\overline{G}) \leq n + 1,$$

$$\chi(G)\chi(\overline{G}) \geq n.$$

Zadanie 7. Udowodnij, że wszystkie podzbiory zbioru n-elementowego można ustawić w cykl w taki sposób, że moce sąsiednich zbiorów są różne.

Zadanie 8. W konferencji bierze udział $2n$ osób. Kazby uczestnik konferencji ma wśród pozostałych uczestników co najmniej n znajomych. Udowodnij, że wszystkich uczestników konferencji mozga zakwaterować w pokojach dwuosobowych tak, by kazby uczestnik mieszkał ze swoim znajomym.