Matematyka dyskretna

Zadania domowe na 25 lutego 2014 r.

Zadanie 1. Ile trójkątów (nie równoramiennych) można utworzyć z odcinków o długości $1, 2, \ldots, n$?

Zadanie 2. Znajdź dowód kombinatoryczny tożsamości

$$\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \binom{n+k}{m} = \sum_{k=0}^{n} \binom{m}{m-k} \binom{n}{k} 2^k.$$

Zadanie 3. Znajdź dowód kombinatoryczny tożsamości: $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$.

Zadanie 4. Wykaż tożsamość podając dowód kombinatoryczny:

$$\sum_{k,l} \binom{m-(k+1)}{p-k} \binom{n-(l+1)}{q-l} = \binom{m}{p} \binom{n}{q}.$$

Wskazówka: p liczb z $[m]$, q liczb z $[n]$, sumowanie po k, l, gdzie wybrano $1, \ldots, k$ oraz $1, \ldots, l$ ale nie $k+1$ i nie $l+1$ z odpowiednich przedziałów.

Zadanie 5. Znajdź zwartą postać sumy i podaj dowód kombinatoryczny:

$$\sum_{k} \binom{k}{r} \binom{n}{k} \binom{m}{m-k}.$$