

Algebra, zadania przygotowawcze z teorii grup

Zadanie 1. Które z poniższych grup są izomorficzne?

$$\mathbb{Z}_2 \times S_3, \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_6, \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_4, D,$$

gdzie D oznacza grupę izometrii własnych sześciokąta foremnego.

Zadanie 2. Pokaż, że grupa addytywna liczb wymiernych $\mathbb{Q}$ nie jest iloczynem prostym żadnych dwóch swoich podgrup właściwych.

Zadanie 3. Czy grupy $\text{Aut}(\mathbb{Z}_8)$ i $\text{Aut}(\mathbb{Z}_{10})$ są izomorficzne? Wskaż, o ile istnieją, dwie podgrupy właściwe H, F w $\text{Aut}(\mathbb{Z}_8)$ takie, że $\text{Aut}(\mathbb{Z}_8) = F \times H$.

Zadanie 4. Wykaż, że jeśli G jest grupą abelową rzędu 78, to G jest cykliczna.

Zadanie 5. Udowodnij, że jeśli G jest grupą rzędu 10 i G ma dokładnie jeden element rzędu 2, to G jest grupą cykliczną.

Zadanie 6. Niech $|G| = 20$ oraz niech H będzie podgrupą normalną rzędu 4. Pokaż, że G jest abelowa.

Zadanie 7. Grupa kwaternionów to grupa $H = \{1, -1, i, -i, j, -j, k, -k\}$, w której działanie zdefiniowane jest przez warunki:

$$1 \cdot x = x \cdot 1 = x; (-1) \cdot x = x \cdot (-1) = -x \text{ dla } x \in H$$

$$i \cdot j = k = j \cdot (-i); j \cdot k = i = i \cdot (-j); k \cdot i = j = i \cdot (-k); i^2 = j^2 = k^2 = -1.$$

Pokaż, że $F = \{1, -1\}$ jest podgrupą normalną w H . Z którą, a z grup $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_4$ jest izomorficzna grupa H/F ?

Zadanie 8. Wykaż, że grupa $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ jest izomorficzna z grupą F wszystkich pierwiastków zespolonych z 1 (wszystkich możliwych stopni) względem działania mnożenia. Tutaj $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ są rozpatrywane jako grupy względem działania dodawania.

Zadanie 9. Ile jest homomorfizmów grup $S_3 \rightarrow \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_6$? Wyznacz jeden z nietrywialnych homomorfizmów.

Zadanie 10. Niech

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \mid a, d \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, b \in \mathbb{R} \right\}$$

Niech

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid b \in \mathbb{R} \right\}.$$

Udowodnij, że:

- (i) H jest podgrupą normalną w grupie G (w której działaniem jest mnożenie macierzy),
- (ii) $G/H \cong R^* \times R^*$, gdzie R^* oznacza multiplikatywną grupę ciała liczb rzeczywistych.

Zadanie 11. W grupie S_{12} dane są dwa elementy σ_1, σ_2 rzędu 21. Udowodnij, że są one sprzężone w tej grupie (czyli $\sigma_1 = \tau \sigma_2 \tau^{-1}$ dla pewnego $\tau \in S_{12}$).

Zadanie 12. Wskaż element maksymalnego rzędu w grupie S_6 .

Zadanie 13. Dana jest permutacja $\sigma \in A_n$. Wyznacz centralizator elementu σ w grupie

a) S_n

b) A_n

Wyznacz klasę sprzężoności elementu σ w grupie

a) S_n

b) A_n (o ile $\sigma \in A_n$).

Rozwiąż te zadania w następujących przypadkach:

i) $\sigma = (1, 2, 3, 4, 5) \in A_5$

ii) $\sigma = (1, 2)(3, 4) \in A_4$

Zadanie 14. Rozpatrujemy wszystkie działania grupy G rzędu 27 na zbiorze X mocy 32. Jaka może być minimalna liczba punktów stałych? Zdefiniuj takie działanie.

Zadanie 15. Czy istnieje działanie tranzytywne grupy $S_4 \times A_5$ na zbiorze X mocy 144?

Zadanie 16. Podgrupy normalne N_1, N_2 skończonej grupy G spełniają $N_1 \cap N_2 = \{1\}$, zaś grupy ilorazowe G/N_1 i G/N_2 są cykliczne.

- (i) Dowiedź, że grupa G jest izomorficzna z pewną podgrupą grupy $G/N_1 \times G/N_2$ i wywnioskuj, że G jest przemienna.
- (ii) Załóżmy dodatkowo, że indeksy podgrup N_1 i N_2 w grupie G są względnie pierwsze. Udowodnij, że G jest cykliczna.

Zadanie 17. W grupie G dana jest podgrupa normalna H oraz podgrupa F . Pokaż, że:

- i) HF jest podgrupą w G
- ii) H jest podgrupą normalną w HF
- iii) $F \cap H$ jest podgrupą normalną w F
- iv) $(HF)/H \cong F/(F \cap H)$.

Zadanie 18. Załóżmy, że grupa G działa na zbiorze X . Załóżmy, że $\text{Orb}(x) = \text{Orb}(y)$ dla pewnych $x, y \in X$. Pokaż, że podgrupy G_x, G_y są sprzężone (to znaczy: $gG_xg^{-1} = G_y$ dla pewnego $g \in G$).

Zadanie 19. Niech G będzie grupą skończoną, a X - zbiorem wszystkich podgrup grupy G . Dla każdego $g \in G$ definiujemy funkcję $\phi_g : X \rightarrow X$ wzorem $\phi_g(H) = gHg^{-1}$, dla $H \in X$. Wykaż, że definiuje to działanie grupy G na zbiorze X . Wykaż, że jeśli G jest p-grupą skończoną (dla pewnej liczby pierwszej p), to liczba podgrup G nie będących podgrupami normalnymi w G jest podzielna przez p .

Zadanie 20. Załóżmy, że grupa $G/Z(G)$ jest cykliczna. Pokaż, że G jest abelowa. Tutaj $Z(G)$ oznacza centrum grupy G .