Teoria złożoności

Zadania — 1. seria

31 maja 2005

Termin rozwiązania: 15 czerwca 2005

Zadania

1. (1 pt.) Podać przykład relacji $r \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$ rozpoznawanej w czasie wielomianowym i takiej, że dla pewnego k,
$$r(x,y) \implies |x|^{\frac{1}{k}} \le |y| \le |x|^k\,,$$
dla której oba języki $L(r) = \{x : (\exists y)\, r(x,y)\}$ i $L'(r) = \{y : (\exists x)\, r(x,y)\}$ są NP–zupełne.

2. (1 pt.) Udowodnić, że problem

   > Dla danej gramatyki **bezkontekstowej** G (nad alfabetem $\{0,1\}$), rozstrzygnąć, czy $L(G) \neq \emptyset$,

   jest zupełny w klasie P ze względu na redukcje w pamięci L.

3. (1.5 pt.) Dowieść, że problem czy dana gramatyka bezkontekstowa generuje język regularny jest algorytmicznie nierozstrzygalny.

4. (2 pt.) Udowodnić, że następujące dwa problemy są zupełne w *PSPACE* ze względu na redukcje w czasie wielomianowym.

   (a) Dane wyrażenie regularne α; czy $L(\alpha) = \Sigma^*$?

   (b) Dane wyrażenia regularne $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ (k nieograniczone); czy $L(\alpha_1) \cap \ldots \cap L(\alpha_k) \neq \emptyset$?

   Co można powiedzieć, jeśli k jest ustalone ?

5. (3 pt.) Udowodnić, że problem 3–kolorowalności jest NP–zupełny nawet, kiedy ograniczymy się do grafów planarnych. (Pytanie, czy dany graf jest planarny można rozstrzygnąć w czasie wielomianowym dzięki twierdzeniu Kuratowskiego.)

   Co można powiedzieć o analogicznym problemie dla 4 kolorów ?

6. (1.5 pt.) Zbadać złożoność problemu CNF–SAT, jeśli dodatkowo zakładamy, że każda zmienna występuje co najwyżej dwa razy.

7. (3 pt.) Udowodnić, że problem znajdowania wartości logicznej obwodu logicznego bez zmiennych pozostaje **P**-zupełny, jeśli ograniczymy się do obwodów, które można narysować jako grafy planarne. *Uwaga:* Można używać bramki *not* (a nawet trzeba).

8. (1.5 pt.) Dowieść „łatwej” implikacji Twierdzenia PCP, tzn.

$$PCP(\log n, \mathcal{O}(1)) \subseteq NP\,.$$

9. (1 pt.) Podać przykład języka bezkontekstowego nieregularnego rozpoznawanego przez ciąg obwodów o stałej głębokości i rozmiarze wielomianowym.

Problemy

1. *(M. Sipser)* Określamy nieskończony obwód logiczny podobnie jak skończony, z tym że dopuszczamy przeliczalnie wiele bramek wejściowych $x_0, x_1, \ldots$ i tyleż samo bramek zanegowanych $\bar{x}_0, \bar{x}_1, \ldots$ Bramki *or* i *and* mogą mieć nieskończenie, ale **przeliczalnie** wiele wejść.

   Taki obwód oblicza funkcję $f : \{0,1\}^\omega \to \{0,1\}$. Podobnie, jak w przypadku skończonym, *głębokością* obwodu jest supremum długości ścieżek od bramki wejściowej do bramki wyjściowej.

   Nieskończoną funkcją parzystości nazywamy dowolną funkcję $par : \{0,1\}^\omega \to \{0,1\}$ taką, że zmiana jedego bitu argumentu powoduje zmianę wartości funkcji.

   (a) Dowieść, że istnieje co najmniej *continuum* takich funkcji[1]. (W przypadku skończonym są tylko dwie takie funkcje.)

   (b) Dowieść, że żadna nieskończona funkcją parzystości nie jest obliczana przez obwód o skończonej głębokości.

2. Czy zbiór słów skończonych nad alfabetem $\{0,1\}$, w których oba symbole występują tyle samo razy, może być rozpoznany przez ciąg obwodów o stałej głębokości i rozmiarze wielomianowym ?

[1] Pan K. Onak słusznie zauważył że jest ich nawet $2^{continuum}$.