

# Egzamin ze złożoności obliczeniowej

14 czerwca 2013

*Rozwiązanie każdego zadania proszę pisać na oddzielnej, czytelnie podpisanej kartce.*

1. *Słowo z dziurami* nad alfabetem  $\Sigma$  to słowo  $w \in (\Sigma \cup \{?\})^*$ , gdzie  $?$  jest specjalną literą nie należącą do  $\Sigma$ . Mówimy, że słowo  $u \in \Sigma^*$  zawiera słowo z dziurami  $w = w_0?w_1?w_2 \dots ?w_n$ , gdzie  $w_i \in \Sigma^*$ , jeśli istnieją  $a_1, a_2, \dots, a_n \in \Sigma$ , dla których  $w_0a_1w_1a_2w_2 \dots a_nw_n$  jest podsłowem (infiksem)  $u$ . Innymi słowy, dziura pasuje do dowolnej pojedynczej litery. Np.  $bbaaacb$  zawiera słowo  $a??c$ , a  $aacba$  nie zawiera  $a??c$ .

Udowodnij, że następujący problem jest zupełny w klasie NP.

**Dane są:**

skończony alfabet  $\Sigma$  z wyróżnionymi literami  $a, b \in \Sigma$ ,

skończona lista „zabronionych” słów z dziurami  $Z$ ,

liczba naturalna  $n$  zapisana unarnie (tzn. jako  $1^n$ ).

**Rozstrzygnij**, czy istnieje słowo postaci  $a\Sigma^*b$  o długości co najwyżej  $n$ , nie zawierające w powyższym sensie żadnego z zabronionych słów.

2. Graf nieskierowany jest *dwudzielny*, jeśli jego zbiór wierzchołków można podzielić na dwa rozłączne zbiory  $X$  i  $Y$  w taki sposób, że każda krawędź ma jeden koniec w  $X$ , a drugi w  $Y$ .

Wykaż, że następujący problem jest w NL: Dla danego grafu nieskierowanego  $G$ , rozstrzygnij, czy  $G$  jest grafem dwudzielnym. (Grafy kodujemy jako macierz incydencji wypisaną wiersz po wierszu.)

3. Niech

$$I = \{ \langle G \rangle \# \langle H \rangle \mid G \text{ i } H \text{ to izomorficzne grafy skierowane} \},$$

gdzie  $\langle G \rangle$  i  $\langle H \rangle$  to macierze sąsiedztwa grafów  $G$  i  $H$ , wypisane wiersz po wierszu. Wykaż, że jeśli  $I \in \text{BPP}$ , to  $I \in \text{RP}$ .

Przypomnienie: Język  $L$  jest w RP, jeśli istnieje wielomianowa probabilistyczna maszyna Turinga  $M$  spełniająca warunki:

- jeśli  $x \in L$ , to  $\Pr[M(x) = \text{TAK}] \geq 1/2$ ;
- jeśli  $x \notin L$ , to  $M(x) = \text{NIE}$ .