Kolokwium. Środa 11 maja, godz. 12:15–14:00

Każde zadanie proszę pisać na oddzielnej, czytelnie podpisanej kartce.

1. Udowodnij, że następujący problem jest NP-zupełny.

   Dany alfabet A i wyrażenie regularne α nad A; rozstrzygnij, czy istnieje słowo generowane przez α, zawierające wszystkie litery z A.

   Wskazówka. Dla dowodu NP-trudności można zredukować problem $CNF\text{-}SAT$. Proszę pamiętać, że alfabet A nie jest ustalony i może zależeć od formuły.

2. Rozważamy słowa postaci
$$w = w_1 w_2 \dots w_{2^m-1} w_{2^m}$$
   gdzie $w_i \in \{0,1\}^m$, dla $i = 1, \dots, 2^m$. Niech L będzie zbiorem tych słów w powyższej postaci, w których liczba różnych bloków w_i jest parzysta. Wykaż, że L może być rozpoznany przez ciąg obwodów C_n rozmiaru wielomianowego i głębokości $\mathcal{O}(\log n)$.

3. Rozważamy kratę $n \times n$ z punktami pokolorowanymi na czarno lub biało. (Można ją zakodować słowem w $\{0,1\}^{n^2}$ w oczywisty sposób.) Wykaż, że deterministyczna maszyna Turinga z logarytmiczną pamięcią może rozpoznać, czy istnieje monochromatyczna ścieżka z poziomu górnego do poziomu dolnego.

4. Wykaż, że klasa złożoności P jest zamknięta na obrazy homomorficzne względem homomorfizmów **niezerowych** wtedy i tylko wtedy, gdy $P = NP$.

   Wskazówka. Dla dowodu implikacji *tylko wtedy*, można wykorzystać problem SAT.

   Przypomnienie. Homomorfizm jest zadany przez funkcję $h : \Sigma \to \Gamma^*$ (gdzie Σ i Γ są skończonymi alfabetami), którą następnie rozszerza się jednoznacznie do funkcji $\hat{h} : \Sigma^* \to \Gamma^*$ poprzez równości
$$\begin{aligned} \hat{h}(\varepsilon) &= \varepsilon \\ h(vw) &= h(v)\, h(w). \end{aligned}$$
   Obrazem homomorficznym języka $L \subseteq \Sigma^*$ jest język $\{\hat{h}(w) : w \in L\}$. Homomorfizm jest **niezerowy** jeśli $(\forall \sigma \in \Sigma)\, h(\sigma) \neq \varepsilon$.

   Uwaga. Konieczność założenia o niezerowości homomorfizmu została dostrzeżona w trakcie pisania kolokwium. Można więc zadać dodatkowe pytanie: dlaczego bez tego założenia teza zadania jest nieprawdziwa ?