Zadanie domowe 4.

Termin rozwiązania: wtorek 29 maja, godz. 23:59.

Idea. Dysponując hipotetycznym algorytmem rozstrzygającym pytanie, czy dwa grafy etykietowane są izomorficzne, skonstruować algorytm, który taki izomorfizm *znajduje* (jeśli istnieje), działając w niewiele gorszym czasie.

Dokładne sformułowanie. *Graf* (skierowany[1]) o n wierzchołkach jest zadany przez relację $E \subseteq \{1,\ldots,n\} \times \{1,\ldots,n\}$. Kodujemy go słowem bitowym w_E długości n^2, gdzie na pozycji $(i-1)n+j$ jest 1 wtt, gdy $E(i,j)$.

Graf *etykietowany* jest ponadto wyposażony w funkcję $\ell : \{1,\ldots,n\} \to \mathbb{N}$. Kodujemy go

$$w_{E,\ell} \quad = \quad w_E \,\#\, \ell(1) \,\#\, \ell(2) \,\#\, \ldots \,\#\, \ell(n)$$

gdzie liczby $\ell(i)$ są przedstawione w postaci binarnej.

Grafy etykietowane o tej samej liczbie wierzcholków n zadane przez (E_1,ℓ_1) i (E_2,ℓ_2) są *izomorficzne*, gdy istnieje permutacja $\sigma : \{1,\ldots,n\} \to \{1,\ldots,n\}$ spełniająca

$$\ell_1(i) \quad = \quad \ell_2(\sigma(i)) \tag{1}$$

$$E_1(i,j) \iff E_2(\sigma(i),\sigma(j)). \tag{2}$$

Takie σ nazywamy *izomorfizmem* i kodujemy słowem $\sigma(1) \,\#\, \sigma(2) \,\#\, \ldots \,\#\, \sigma(n)$.
Przypuśćmy, że algorytm A rozstrzyga problem decyzyjny, czy dwa etykietowane grafy są izomorficzne w czasie $T(n)$. **Skonstruuj algorytm** A', który w przypadku, gdy odpowiedź jest pozytywna, znajduje (pewien) izomorfizm σ. Algorytm A' powinien działać w czasie $p(T(q(n))$, dla pewnych wielomianów[2] $p(n), q(n)$.

Bonus. Analogiczne pytanie dla grafów nieetykietowanych. (Wtedy izomorfizm jest bijekcją spełniającą warunek (2).)

Uwaga. Za całkowicie poprawne rozwiązanie *Bonusa* można uzyskać dodatkowe 0.5 punkta (w skali docelowej), czyli podwoić liczbę punktów za niniejsze zadanie.

[1] Trudność zadania nie zmienia się zasadniczo przy rozważaniu grafów nieskierowanych.
[2] W szczególności, jeśli A działa w czasie wielomianowym, to A' też.