Kolokwium. Środa 9 maja, godz. 12:15–14:00

Każde zadanie proszę pisać na oddzielnej, czytelnie podpisanej kartce.

1. Rozważamy deterministyczną maszynę Turinga o jednej taśmie ze zmodyfikowanymi zasadami przesunięć głowicy. Maszyna *skoczna* może przesunąć głowicę w prawo, pozostawić ją w miejscu lub przenieść „jednym skokiem" do początku taśmy. (Nie wykonuje natomiast zwykłych ruchów w lewo.)

   Wykaż, że dla dowolnej standardowej maszyny Turinga M (z jedną taśmą) istnieje maszyna skoczna M' rozpoznająca ten sam język. Co więcej, jeśli M pracuje w czasie $T(n)$, to M' pracuje w czasie ograniczonym przez wielomian od $T(n)$.

2. Skończony zbiór $C \subseteq \mathbb{N}^k$, gdzie $k \geq 2$, nazwiemy *prostokątem*, jeśli można go przedstawić jako

$$C \quad = \quad A \times B,$$

   dla pewnych $A \subseteq \mathbb{N}^i$, $B \subseteq \mathbb{N}^j$, gdzie $k = i + j$, $i, j \geq 1$. (W szczególności każdy wektor $(c_1, \ldots, c_k) \in C$ można przedstawić $(c_1, \ldots, c_k) = (a_1, \ldots, a_i, b_1, \ldots, b_j)$, gdzie $(a_1, \ldots, a_i) \in A$, $(b_1, \ldots, b_j) \in B$.)

   Rozważamy standardową reprezentację skończonych zbiorów $C \subseteq \mathbb{N}^k$ (k nie jest ustalone) nad alfabetem $\{0, 1, \$, \#\}$: wektor $(a_1, \ldots, a_k) \in \mathbb{N}^k$ jest reprezentowany przez $a_1\$a_2\$\ldots\$a_k$ (gdzie a_i jest reprezentowane binarnie), a zbiór wektorów $\{v_1, \ldots, v_m\}$ przez $v_1\#v_2\#\ldots\#v_m$ (oczywiście zbiór może mieć wiele reprezentacji).

   Wykaż, że zbiór słów reprezentujących prostokąty jest rozpoznawalny przez deterministyczną maszynę Turinga pracującą w pamięci logarytmicznej.

3. Dla języka $L \subseteq \Sigma^*$ określamy

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}L &= \{v : (\exists w)\, |w| = |v| \wedge vw \in L\}, \\ L\frac{1}{2} &= \{v : (\exists w)\, |w| = |v| \wedge wv \in L\}. \end{aligned}$$

   Czy istnieje

   (a) język L, taki, że L jest w klasie P, ale $\frac{1}{2}L$ i $L\frac{1}{2}$ są NP-zupełne ?

   (b) język L, taki, że L jestNP-zupełny, ale $\frac{1}{2}L$ i $L\frac{1}{2}$ są w P ?

4. Słowo $w \in \{0, 1\}^*$ nazwiemy *złożonym*, jeśli można je przedstawić $w = v^n$, dla pewnego słowa $v \in \{0, 1\}^*$ i $n \geq 2$. Wykaż, że zbiór słów złożonych można rozpoznać ciągiem obwodów o wielomianowym rozmiarze i stałej głębokości.