Języki, Automaty i Obliczenia 2001/2002

Zadania z gwiazdką — druga seria

Termin rozwiązania : do 11 stycznia 2001

1. (0.5 punkta) Dowieść, że dla każdego automatu ze stosem A istnieje stała C (zależna od automatu) taka, że dla każdego słowa $w \in Z(A)$ istnieje obliczenie akceptujące (przez pusty stos) o długości $\leq C|w|$. Wskazówka: oszacować wysokość stosu w obliczeniu akceptującym.

2. (0.5 p.) Rozstrzygnąć, czy klasa języków bezkontekstowych jest zamknięta na operacje $\frac{1}{2}L$ i $\sqrt{L}$.

   Dla języka $L \subseteq \Sigma^*$, $\frac{1}{2}L =_{df} \{w : (\exists u)\,|u| = |w| \wedge wu \in L\}$ i $\sqrt{L} =_{df} \{w : ww \in L\}$.

3. (1 p.) Rozważamy grę dwóch graczy, powiedzmy Mr. 1 i Mr. 2, którzy na przemian wybierają litery ze skończonego alfabetu Σ, formując w ten sposób słowo $a_1b_1a_2b_2\ldots$, gdzie symbole a_i są wybierane przez Mr. 1, a b_i przez Mr. 2 (rozpoczyna Mr. 1). Dla gry ustalony jest pewien język $L \subseteq \Sigma^*$. Jeśli w pewnym momencie gry wybrane słowo należy do L, wygrywa Mr. 2. W przeciwnym razie, a więc, jeśli gra toczy się w nieskończoność, uważamy, że wygrywa Mr. 1.

   Z kolei rozważamy uogólnienie powyższej gry, w której gracze rozpoczynają grę od jakiegoś słowa początkowego w; tak więc słowo uformowane po n rundach ma postać $wa_1b_1a_2b_2\ldots c_{\lceil \frac{n}{2} \rceil}$ (gdzie c jest a lub b, w zależności od parzystości n). Strategią dla Mr. i jest dowolna funkcja $s_i : \Sigma^* \to \Sigma$, wskazująca, jaki ruch $s(u)$ powinien wykonać Mr. i, jeśli ruch należy do niego, a słowem utworzonym do tej pory jest u.

   Powiemy, że strategia s_i jest realizowana przez automat skończony, jeśli istnieje deterministyczny automat skończony A i funkcja ze zbioru jego stanów $h : Q^A \to \Sigma$, taka, że $s_i(u) = h(\hat{\delta}^A(q_I^A, u))$.

   Proszę sformalizować intuicyjne pojęcie *strategii wygrywającej* (dla każdego z graczy).

   Dowieść, że jeśli język L jest regularny, to dla każdej pozycji startowej u (cały czas zakładamy, że grę rozpoczyna Mr. 1), dokładnie jeden z graczy ma strategię wygrywającą i co więcej, ma także strategię realizowaną przez automat skończony.

   Podać przykład języka L, który nie ma takiej własności.

4. (0.5 p.) Dowieść, że jeżeli język bezkontekstowy L ma taką własność, że dla każdych $w, v \in L$, w jest prefiksem v lub v jest prefiksem w, to L jest regularny.

5. (0.5 p.) Scharakteryzaować wszystkie pary liczb całkowitych α, β, takie, że język

   $$\{a^m b^n a^{|\alpha m + \beta n|} : m, n \in N\}$$

   jest bezkontekstowy.