Języki, Automaty i Obliczenia 1996

Zadania z gwiazdką

1. Skonstruować nieskończony ciąg liter nad alfabetem $\{a, b, c\}$ nie zawierający żadnego kwadratu, tj. podsłowa postaci ww, $w \neq \epsilon$.

   Termin rozwiązania : do 23. X. 1996.

2. Niech L będzie językiem regularnym. Dowieść, że następujący język jest również regularny : $\mathrm{Fibb}(L) = \{w : (\exists u)|u| = F_{|w|} \wedge wu \in L\}$
   gdzie F_n jest n-tą liczbą Fibonacciego tzn.

   $$F_1 = F_2 = 1$$
   $$F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$$

   Termin rozwiązania : do 30. X. 1996.

3. Słowo nad alfabetem jednoliterowym można utożsamić z jego długością. Zatem język nad takim alfabetem można utożsamić ze zbiorem liczb naturalnych. Dowieść, że zbiór liczb naturalnych jest regularny wtedy i tylko wtedy, gdy można go przedstawić jako sumę skończonej liczby zbiorów postaci $\{a + b \cdot n \mid n \in \mathbf{N}\}$ (taki zbiór nazywa się semi–liniowym).

   Termin rozwiązania : do 30. X. 1996.

4. Niech A – alfabet, $A' = \{a' : a \in A\}$. Określamy homomorfizmy h, h_1, h_2 z $A \cup A'$ w A następująco: $h(a) = h(a') = a$, $h_1(a) = a$, $h_1(a') = \epsilon$, $h_2(a) = \epsilon$, $h_2(a') = a$.

   Definiujemy *przeplot* języków L_1 i L_2 :

   $$\mathrm{Shuffle}(L_1, L_2) = \{x : (\exists y \in h^{-1}(x))h_1(y) \in L_1 \wedge h_2(y) \in L_2\}$$

   Niech $\Sigma = \Sigma' \cup \Sigma''$, gdzie $\Sigma' \cap \Sigma'' = \emptyset$. Zaprojektować algorytm, który, dla danego automatu skończonego A nad alfabetem Σ, rozstrzyga, czy $L(A) = \mathrm{Shuffle}(L_1, L_2)$, dla pewnych $L_1 \subseteq \Sigma'^*$ i $L_2 \subseteq \Sigma''^*$.

   Termin rozwiązania : do 6. XI. 1996.

5. Dowieść, że dla dowolnego słowa $w \in \Sigma^*$, można skonstruować automat deterministyczny rozpoznający zbiór wszystkich podsłów słowa w, w taki sposób, że liczba stanów automatu zależy liniowo od długości słowa w.

   Termin rozwiązania : do 6. XI. 1996.

6. Dowieść, że nad jednoliterowym alfabetem każdy język bezkontekstowy jest regularny.

   Termin rozwiązania : do 27. XI. 1996.

7. Dowieść, że dla ustalonego automatu ze stosem, zbiór słów, które stanowią zawartość stosu w pewnym obliczeniu akceptującym jest językiem bezkontekstowym. *Wskazówka :* dowieść najpierw, że zbiór słów, które stanowią zawartość stosu w jakimś obliczeniu, jest regularny.

   Czy pierwszy ze wspomnianych zbiorów jest również zawsze językiem regularnym ?

   Termin rozwiązania : do 27. XI. 1996.

8. Dowieść, że język $\{ww^R : w \in \{0,1\}^*\}$ nie jest postaci $L(A)$ dla żadnego *deterministycznego* automatu ze stosem.

   Automat ze stosem jest *deterministyczny*, jeśli, dla każdych q, a, Z, istnieje co najwyżej jedno przejście postaci $q, a, Z \to_A q', \gamma$.

   Termin rozwiązania : do 27. XI. 1996.

9. Rozważamy wyrażenia Boole'owskie zbudowane ze stałych $0, 1$, nawiasów $(,)$ i operacji $\wedge$ i $\vee$, z oczywistą semantyką. Czy istnieje automat skończony nad alfabetem $\{0, 1, (,), \wedge, \vee\}$ który, po przeczytaniu takiego wyrażenia Boole'owskiego przyjmuje stan akceptujący wtedy i tylko wtedy, gdy wyrażenie ma wartość 1 ?

   Uwaga : nie żądamy, by automat rozpoznawał również strukturę wyrażeń; tzn. nasz automat może również akceptować wiele słów nie będących wyrażeniami Boole'owskimi (jak np. $)))1\vee$).

   Termin rozwiązania : do 27. XI. 1996.

10. Dowieść, że jeżeli język bezkontekstowy L ma taką własność, że dla każdych $w, v \in L$, w jest prefiksem v lub v jest prefiksem w, to L jest regularny.

    Termin rozwiązania : do 27. XI. 1996.