Dowód, że funkcja Ackermana nie jest pierwotnie rekurencyjna

Jakub Pawlewicz

26 marzec 2001

W całym dokumencie dziedziną zmiennych są liczby naturalne ($\mathbb{N}$), a wszystkie funkcje są postaci $\mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$.

Wszędzie, gdzie będzie podana jakaś tożsamość zależna od zmiennej wolnej np. x, to zakłada się, że tożsamość ta spełniona jest dla wszystkich $x \in \mathbb{N}$, chyba, że ponadto podane zostaną ograniczenia na tą zmienną, np. $x \geq 1$, wtedy oznacza to, że tożsamość jest spełniona dla wszystkich $x \in \mathbb{N}$ i $x \geq 1$.

1 Funkcja Ackermana

Definicja 1. Funkcja Ackermana $A : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$, określona jest równaniami rekurencyjnymi:

$$A(0,0,x) = x \tag{A1}$$
$$A(0,y+1,x) = A(0,y,x) + 1 \tag{A2}$$
$$A(1,0,x) = 0 \tag{A3}$$
$$A(z+2,0,x) = 1 \tag{A4}$$
$$A(z+1,y+1,x) = A(z,A(z+1,y,x),x) \tag{A5}$$

Twierdzenie 1 (Własności funkcji Akcermana). *Zachodzi:*

$$A(0,y,x) = x + y \tag{1.1}$$
$$A(1,y,x) = xy \tag{1.2}$$
$$A(2,y,x) = x^y \tag{1.3}$$
$$A(z+2,1,x) = x \tag{1.4}$$

Dowód. Własności (1.1), (1.2), (1.3) dowodzimy indukcją po y, a własność (1.4) indukcją po z.

- (1.1). $y = 0$ to własność (A1). $A(0,y+1,x) \overset{(A2)}{=} A(0,y,x)+1 = x+y+1$.
- (1.2). $y = 0$ to własność (A3). $A(1,y+1,x) \overset{(A5)}{=} A(0,A(1,y,x),x) = A(0,xy,x) \overset{(1.1)}{=} x(y+1)$.
- (1.3). $y = 0$ to własność (A4). $A(2,y+1,x) \overset{(A5)}{=} A(1,A(2,y,x),x) = A(1,x^y,x) \overset{(1.2)}{=} x^{y+1}$.

- (1.4). Dla $z = 0$ wynika to z (1.3). $A(z+3,1,x) \overset{(A5)}{=} A(z+2, A(z+3,0,x),x) \overset{(A4)}{=} A(z+2,1,x) = x$.

$\square$

2 Parę nierówności

Lemat 1.

$$2x \geq x+1 \qquad \textit{dla } x \geq 1. \tag{2.1}$$

Lemat 2.

$$x^y \geq xy \qquad \textit{dla } x \geq 2. \tag{2.2}$$

Dowód. Indukcja po y. Dla $y = 0$, prawa strona (2.2) wynosi 0. Dla $y = 1$ (2.2) ma postać $x \geq x$. Niech $y \geq 1$. Wtedy $x^{y+1} = x^y x \geq (xy)x \geq (2y)x \overset{(2.1)}{\geq} x(y+1)$. $\square$

Wniosek 1.

$$x^y \geq y+1 \qquad \textit{dla } x \geq 2. \tag{2.3}$$

Dowód. Dla $y = 0$ (2.3) to $1 \geq 1$. Dla $y \geq 1$ mamy $x^y \overset{(2.2)}{\geq} xy \geq 2y \overset{(2.1)}{\geq} y+1$. $\square$

Wniosek 2.

$$2^x > x. \tag{2.4}$$

Dowód. Dla $x = 0$ i $x = 1$ jest to oczywiste. Niech $x \geq 2$. Mamy $2^x \overset{(2.3)}{\geq} x+1 > x$. $\square$

Lemat 3.

$$x^y \geq x(y+1) \qquad \textit{dla } x \geq 2 \textit{ i } y \geq 3. \tag{2.5}$$

Dowód. Indukcja po y. Dla $y = 3$ mamy $x^y = x^3 = (x^2)x \geq 4x = x(y+1)$. Następnie $x^{y+1} = x^y x \geq x(y+1)x \geq 2(y+1)x \overset{(2.1)}{\geq} x(y+2)$. $\square$

Wniosek 3.

$$x^y \geq y+2 \qquad \textit{dla } x \geq 2 \textit{ i } y \geq 2. \tag{2.6}$$

Dowód. Dla $y = 2$ mamy $x^2 \geq 4 = y+2$. Niech $y \geq 3$. Wtedy $x^y \overset{(2.5)}{\geq} x(y+1) \geq 2(y+1) \overset{(2.1)}{\geq} y+2$. $\square$

Wniosek 4.

$$2^x > x+1 \qquad \textit{dla } x \geq 2. \tag{2.7}$$

Dowód. $2^x \overset{(2.6)}{\geq} x + 2 > x + 1.$ □

Lemat 4.

$$x^y \geq 2xy \qquad \textit{dla } y \geq 4, x \geq 2. \tag{2.8}$$

Dowód. Indukcja po y. Dla $y = 4$ mamy $x^4 = (x^3)x \geq 8x = 2yx$. Następnie $x^{y+1} = x^y x \geq 2xyx \geq 2x(2y) \overset{(2.1)}{\geq} 2x(y+1)$. □

Wniosek 5.

$$x^y \geq 2y + 2 \qquad \textit{dla } y \geq 3, x \geq 2. \tag{2.9}$$

Dowód. Dla $y = 3$ mamy $x^3 = 8 = 2y + 2$. Niech $y \geq 4$. Wtedy $x^y \overset{(2.8)}{\geq} 2xy \geq 4y = 2(2y) \overset{(2.1)}{\geq} 2(y+1)$. □

3 Nierówności dla funkcji Ackermana

Twierdzenie 2. *Funkcja Ackermana jest niemalejąca po y, dla $x \geq 1$.*

$$A(z, y', x) \geq A(z, y, x) \textit{ dla wszystkich } y' \geq y. \tag{3.1}$$

Dowód. Wystarczy udowodnić, że

$$A(z, y + 1, x) \geq A(z, y, x). \tag{3.2}$$

Indukcja po z.

1. Dla $z = 0$ (3.2) na mocy (1.1) sprowadza się do $x + y + 1 \geq x + y$. Dla $z = 1$ (3.2) na mocy (1.2) sprowadza się do $x(y + 1) \geq xy$.

2. Zakładamy, że $z \geq 2$ oraz, że $A(z - 1, y + 1, x) \geq A(z - 1, y, x)$, czyli w ogólności

$$A(z - 1, y', x) \geq A(z - 1, y, x) \text{ dla wszystkich } y' \geq y. \tag{3.3}$$

   Teraz stosujemy indukcje po y.

   (a) $y = 0$. Wtedy $A(z, 1, x) \overset{(1.4)}{=} x \geq 1 \overset{(A4)}{=} A(z, 0, x)$.

   (b) $y \geq 1$ oraz $A(z, y, x) \geq A(z, y - 1, x)$. Wtedy $A(z, y + 1, x) \overset{(A5)}{=} A(z - 1, A(z, y, x), x) \overset{(3.3)}{\geq} A(z - 1, A(z, y - 1, x), x) \overset{(A5)}{=} A(z, y, x)$.

□

Lemat 5.

$$A(z, y, x) \geq y + 1 \qquad \textit{dla } z \geq 2, x \geq 2. \tag{3.4}$$

Dowód. Indukcja po z.

1. $z = 2$. Wtedy $A(2, y, x) \overset{(1.3)}{=} x^y \overset{(2.3)}{\geq} y + 1$.
2. Zakładamy, że
$$A(z-1, y, x) \geq y + 1 \text{ oraz } z \geq 3. \tag{3.5}$$
Teraz stosujemy indukcje po y.
   (a) $y = 0$. Wtedy $A(z, 0, x) \overset{(A4)}{=} 1 = y + 1$.
   (b) Niech $y \geq 1$ i $A(z, y-1, x) \geq y$. Mamy $A(z, y, x) \overset{(A5)}{=} A(z-1, A(z, y-1, x), x) \overset{(3.1)}{\geq} A(z-1, y, x) \overset{(3.5)}{\geq} y + 1$.

□

Twierdzenie 3. *Funkcja Ackermana jest niemalejąca po z, dla $x \geq 2$ i $z \geq 1$.*
$$A(z', y, x) \geq A(z, y, x) \text{ dla wszystkich } z' \geq z. \tag{3.6}$$

Dowód. Wystarczy udowodnić, że $A(z+1, y, x) \geq A(z, y, x)$.

Dla $z = 1$ mamy $A(2, y, x) \overset{(1.3)}{=} x^y \overset{(2.2)}{\geq} xy \overset{(1.2)}{=} A(1, y, x)$. Niech $z \geq 2$. Dla $y = 0$ mamy $A(z+1, 0, x) \overset{(A4)}{=} 1 \overset{(A4)}{=} A(z, 0, x)$. Niech $y \geq 1$. Mamy $A(z+1, y, x) \overset{(A5)}{=} A(z, A(z+1, y-1, x), x)$. Z (3.4) mamy $A(z+1, y-1, x) \geq y$, więc $A(z, A(z+1, y-1, x), x) \overset{(3.1)}{\geq} A(z, y, x)$. □

Lemat 6.
$$A(z, y, x) \geq y + 2 \qquad \text{dla } z \geq 2, y \geq 2, x \geq 2. \tag{3.7}$$

Dowód. Indukcja po z.

1. $z = 2$. Wtedy $A(2, y, x) \overset{(1.3)}{=} x^y \overset{(2.6)}{\geq} y + 2$.
2. Zakładamy, że
$$A(z-1, y, x) \geq y + 2 \text{ oraz } z \geq 3. \tag{3.8}$$
Wtedy mamy $A(z, y, x) \overset{(A5)}{=} A(z-1, A(z, y-1, x), x)$. Z (3.4) mamy $A(z, y-1, x) \geq y$, skąd $A(z-1, A(z, y-1, x), x) \overset{(3.1)}{\geq} A(z-1, y, x) \overset{(3.8)}{\geq} y+2$.

□

Twierdzenie 4. *Funkcja Ackermana szybciej rośnie po z niż po y.*
$$A(z+1, y, x) \geq A(z, y+1, x) \qquad \text{dla } z \geq 1, y \geq 3, x \geq 2. \tag{3.9}$$

Dowód. Dla $z = 1$ mamy $A(2, y, x) \overset{(1.3)}{=} x^y \overset{(2.5)}{\geq} x(y+1) \overset{(1.2)}{=} A(1, y+1, x)$. Niech $z \geq 2$. Mamy $A(z+1, y, x) \overset{(A5)}{=} A(z, A(z+1, y-1, x), x)$. Z (3.7) mamy $A(z+1, y-1, x) \geq y+1$, skąd $A(z, A(z+1, y-1, x), x) \overset{(3.1)}{\geq} A(z, y+1, x)$. □

Wniosek 6.

$$A(z+n,y,x) \geq A(z,y+n,x) \qquad \textit{dla } z \geq 1, y \geq 3, x \geq 2. \tag{3.10}$$

Wniosek 7.

$$A(z+n,y,x) > y+n \qquad \textit{dla } z \geq 2, y \geq 3, x \geq 2. \tag{3.11}$$

Dowód. $A(z+n,y,x) \overset{(3.10)}{\geq} A(z,y+n,x) \overset{(3.4)}{\geq} y+n+1 > y+n.$ □

Lemat 7.

$$A(z,y,x) \geq 2y+2 \qquad \textit{dla } z \geq 2, y \geq 3, x \geq 2. \tag{3.12}$$

Dowód. Indukcja po z.

1. $z = 2$. Wtedy $A(2,y,x) \overset{(1.3)}{=} x^y \overset{(2.9)}{\geq} 2y+2$.
2. Zakładamy, że
$$A(z-1,y,x) \geq 2y+2 \text{ oraz } z \geq 3. \tag{3.13}$$
Wtedy mamy $A(z,y,x) \overset{(A5)}{=} A(z-1,A(z,y-1,x),x)$. Z (3.4) mamy $A(z,y-1,x) \geq y$, skąd $A(z-1,A(z,y-1,x),x) \overset{(3.1)}{\geq} A(z-1,y,x) \overset{(3.13)}{\geq} 2y+2$.

□

Twierdzenie 5. *Funkcja Ackermana szybciej rośnie po z niż wykładniczo po y.*

$$A(z+1,y,x) \geq A(z,2y,x) \qquad \textit{dla } z \geq 1, y \geq 4, x \geq 2. \tag{3.14}$$

Dowód. Dla $z = 1$ mamy $A(2,y,z) \overset{(1.3)}{=} x^y \overset{(2.8)}{\geq} 2xy \overset{(1.2)}{=} A(1,2y,x)$. Niech $z \geq 2$. Mamy $A(z+1,y,x) \overset{(A5)}{=} A(z,A(z+1,y-1,x),x)$. Z (3.12) $A(z+1,y-1,x) \geq 2(y-1)+2 = 2y$, skąd $A(z,A(z+1,y-1,x),x) \overset{(3.1)}{\geq} A(z,2y,x)$. □

4 Funkcje pierwotnie rekurencyjne

Definicja 2. Klasę funkcji *pierwotnie rekurencyjnych* określamy jako najmniejszy zbiór PR funkcji $\mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ zawierający funkcje:

$$f(x) = x+1 \tag{PR1}$$
$$f(x_1,\ldots,x_n) = 0 \tag{PR2}$$
$$f(x_1,\ldots,x_n) = x_i \qquad \text{gdzie } 1 \leq i \leq n \tag{PR3}$$

oraz zamknięty na operację złożenia:

$$\begin{gathered} f(x_1,\ldots,x_n) = h\big(g_1(x_1,\ldots,x_n),\ldots,g_k(x_1,\ldots,x_n)\big) \\ \text{gdzie } h, g_1,\ldots,g_k \in PR \text{ i } h : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}, g_1,\ldots,g_k : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N} \end{gathered} \tag{PR4}$$

i operację pierwotnej rekursji:

$$\begin{aligned} f(0, x_1, \ldots, x_k) &= g(x_1, \ldots, x_k) \\ f(n+1, x_1, \ldots, x_k) &= h(n, f(n, x_1, \ldots, x_k), x_1, \ldots, x_k) \\ \text{gdzie } g, h \in PR \text{ i } g &: \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}, h : \mathbb{N}^{k+2} \to \mathbb{N} \end{aligned} \tag{PR5}$$

Lemat 8. *Funkcja stała $f_N(x) = N$ jest pierwotnie rekurencyjna.*

Dowód. Indukcja po N. Dla $N = 0$ to własność (PR2). Niech $g(x) = x + 1$. $g \in PR$ z własności (PR1). Następnie definiujemy f_{N+1} używając własności (PR4). $f_{N+1} = g(f_N(x)) = g(N) = N + 1$. □

Definicja 3. *Ciągiem definicji funkcji* pierwotnie rekurencyjnych nazywamy ciąg funkcji $f_1, \ldots, f_n$ o własnościach:

- $f_1, \ldots, f_{n-1}$ jest ciągiem definicji funkcji,
- definicja f_n jest postaci (PR1)-(PR5),
- definicja f_n zależy tylko od funkcji $f_1, \ldots, f_{n-1}$, tzn. jeśli f_n jest określona przez (PR4), to $h, g_1, \ldots, g_k \in \{f_1, \ldots, f_{n-1}\}$, jeśli jest określona przez (PR5), to $h, g \in \{f_1, \ldots, f_{n-1}\}$.

Definicja 4. *Definicją funkcji* f nazywamy ciąg definicji funkcji $f_1, \ldots, f_n$ taki, że $f_n = f$. *Długością definicji funkcji* f jest liczba funkcji w ciągu definicji funkcji, czyli tutaj n.

5 Dowód, że funkcja Ackermana nie jest pierwotnie rekurencyjna

Lemat 9. *Dla dowolnego N istnieje stała $z_N \geq 2$ taka, że*

$$N < A(z_N, y, 2) \qquad \text{dla } y \geq 3. \tag{5.1}$$

Dowód. Wystarczy przyjąć $z_N = 2 + \max(N-3, 0)$. Wtedy $A(z_N, y, 2) \overset{(3.1)}{\geq} A(z_N, 3, 2) = A(2 + \max(N-3, 0), 3, 2) \overset{(3.11)}{>} \max(N-3, 0) + 3 = \max(N, 3) \geq N$. □

Lemat 10. *Niech $h : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ oraz $g_i : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ dla $1 \leq i \leq k$. Niech $z_h, z_{g_1}, \ldots, z_{g_k} \geq 2$ takie, że zachodzi*

$$h(x_1, \ldots, x_k) < A(z_h, \max(x_1, \ldots, x_k), 2) \quad \text{dla } \max(x_1, \ldots, x_k) \geq 4, \tag{5.2}$$

$$g_i(x_1, \ldots, x_n) < A(z_{g_i}, \max(x_1, \ldots, x_n), 2) \quad \text{dla } \max(x_1, \ldots, x_n) \geq 4 \text{ i } 1 \leq i \leq k. \tag{5.3}$$

Wtedy dla $f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ danej wzorem:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = h\big(g_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, g_k(x_1, \ldots, x_n)\big)$$

istnieje stała $z_f \geq 2$ taka, że

$$\begin{aligned} f(x_1,\ldots,x_n) &< A(z_f, \max(x_1,\ldots,x_n), 2) \\ &\qquad \textit{dla } \max(x_1,\ldots,x_n) \geq 4. \end{aligned} \tag{5.4}$$

Dowód. Niech

$$N_h = \max_{x_1,\ldots,x_k<4} h(x_1,\ldots,x_k). \tag{5.5}$$

Z lematu 9 mamy, że istnieje stała $z_{N_h} \geq 2$, że

$$N_h < A(z_{N_h}, y, 2) \qquad \text{dla } y \geq 3. \tag{5.6}$$

Wystarczy przyjąć:

$$z_f = \max(z_{N_h}, z_h, z_{g_1},\ldots,z_{g_k}) + 1. \tag{5.7}$$

Oznaczmy $X = \max(x_1,\ldots,x_n)$. Zakładamy, że $X \geq 4$. Należy wykazać, że $f(x_1,\ldots,x_n) < A(z_f, X, 2)$.

Rozpatrzmy dwa przypadki.

1. $\max\big(g_1(x_1,\ldots,x_n),\ldots,g_k(x_1,\ldots,x_n)\big) < 4$. Wtedy

$$\begin{aligned} h\big(g_1(x_1,\ldots,x_n),\ldots,g_k(x_1,\ldots,x_n)\big) &\overset{(5.5)}{\leq} N_h \\ &\overset{(5.6)}{<} A(z_{N_h}, X, 2) \overset{(3.6)\text{ i }(5.7)}{\leq} A(z_f, X, 2). \end{aligned}$$

2. $\max\big(g_1(x_1,\ldots,x_n),\ldots,g_k(x_1,\ldots,x_n)\big) \geq 4$. Wtedy mamy:

$$\begin{aligned} &h\big(g_1(x_1,\ldots,x_n),\ldots,g_k(x_1,\ldots,x_n)\big) \\ &\overset{(5.2)}{<} A\big(z_h, \max\big(g_1(x_1,\ldots,x_n),\ldots,g_k(x_1,\ldots,x_n)\big), 2\big) \\ &\overset{(3.1)\text{ i }(5.3)}{\leq} A\big(z_h, \max\big(A(z_{g_1}, X, 2),\ldots,A(z_{g_k}, X, 2)\big), 2\big) = (*) \end{aligned}$$

Z (3.6) i (5.7) mamy, że $A(z_{g_i}, X, 2) \leq A(z_f - 1, X, 2)$ dla $1 \leq i \leq k$, więc $\max\big(A(z_{g_1}, X, 2),\ldots,A(z_{g_k}, X, 2)\big) \leq A(z_f - 1, X, 2)$, skąd

$$\begin{aligned} (*) &\overset{(3.1)}{\leq} A(z_h, A(z_f - 1, X, 2), 2) \\ &\overset{(3.1)\text{ i }(3.9)}{\leq} A(z_h, A(z_f, X - 1, 2), 2) \\ &\overset{(3.6)\text{ i }(5.7)}{\leq} A(z_f - 1, A(z_f, X - 1, 2), 2) \overset{(A5)}{=} A(z_f, X, 2). \end{aligned}$$

W obu przypadkach otrzymaliśmy:

$$f(x_1,\ldots,x_n) = h\big(g_1(x_1,\ldots,x_n),\ldots,g_k(x_1,\ldots,x_n)\big) \leq A(z_f, X, 2).$$

□

Lemat 11. *Niech* $g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}, h : \mathbb{N}^{k+2} \to \mathbb{N}$. *Niech* $z_h, g_h \geq 2$ *takie, że*

$$\begin{aligned} h(x_1, \ldots, x_{k+2}) < A(z_h, \max(x_1, \ldots, x_{k+2}), 2) \\ \text{\textit{dla}} \ \max(x_1, \ldots, x_{k+2}) \geq 4, \end{aligned} \tag{5.8}$$

$$\begin{aligned} g(x_1, \ldots, x_k) < A(z_g, \max(x_1, \ldots, x_k), 2) \\ \text{\textit{dla}} \ \max(x_1, \ldots, x_k) \geq 4. \end{aligned} \tag{5.9}$$

Wtedy dla $f : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$ *danej wzorami:*

$$\begin{aligned} f(0, x_1, \ldots, x_k) &= g(x_1, \ldots, x_k) \\ f(n+1, x_1, \ldots, x_k) &= h(n, f(n, x_1, \ldots, x_k), x_1, \ldots, x_k) \end{aligned}$$

istnieje stała $z_f \geq 2$ *taka, że*

$$\begin{aligned} f(n, x_1, \ldots, x_k) < A(z_f, \max(x_1, \ldots, x_k) + n, 2) \\ \text{\textit{dla}} \ \max(n, x_1, \ldots, x_k) \geq 4. \end{aligned} \tag{5.10}$$

Dowód. Niech

$$N_h = \max_{x_1, \ldots, x_{k+2} < 4} h(x_1, \ldots, x_{k+2}), \tag{5.11}$$

$$N_f = \max_{n, x_1, \ldots, x_k < 4} f(n, x_1, \ldots, x_k). \tag{5.12}$$

Z lematu 9 mamy, że istnieją stałe $z_{N_h}, z_{N_f} \geq 2$, że dla $y \geq 3$ zachodzi:

$$N_h < A(z_{N_h}, y, 2), \tag{5.13}$$

$$N_f < A(z_{N_f}, y, 2). \tag{5.14}$$

Wystarczy przyjąć:

$$z_f = \max(z_g, z_h, z_{N_h}, z_{N_f}) + 1. \tag{5.15}$$

Oznaczmy $X = \max(x_1, \ldots, x_k)$. Wtedy $\max(n, x_1, \ldots, x_k) = \max(n, X)$.

Indukcja po n.

1. $n = 0$. Mamy $\max(0, X) = X \geq 4$, więc

$$g(x_1, \ldots, x_n) \overset{(5.9)}{<} A(z_g, X, 2) \overset{(3.6) \text{ i } (5.15)}{\leq} A(z_f, X, 2).$$

2. $n \geq 1$. Zakładamy, że $\max(n, X) \geq 4$. Założenie indukcyjne to

$$\begin{aligned} f(n-1, x_1, \ldots, x_k) < A(z_f, X + n - 1, 2) \\ \text{dla} \ \max(n-1, X) \geq 4. \end{aligned} \tag{5.16}$$

   Oznaczmy $X' = \max(n-1, X, f(n-1, x_1, \ldots, x_k))$. Rozważmy dwa przypadki.

   (a) $X' < 4$. Oczywiście jest $4 \leq \max(n, X) \leq X + n$. Mamy

$$\begin{aligned} f(n, x_1, \ldots, x_k) &= h(n-1, f(n-1, x_1, \ldots, x_k), x_1, \ldots, x_k) \\ &\overset{(5.11)}{\leq} N_h \overset{(5.13)}{<} A(z_{N_h}, X+n, 2) \overset{(3.6) \text{ i } (5.15)}{\leq} A(z_f, X+n, 2). \end{aligned}$$

(b) $X' \geq 4$. Rozpatrzmy dwa przypadki.

i. $\max(n-1, X) < 4$. Ponieważ $\max(n, X) \geq 4$, więc $\max(n-1, X) = 3$. Wtedy $X' = f(n-1, x_1, \ldots, x_k) \overset{(5.12)}{\leq} N_f \overset{(5.14)}{<} A(z_{N_f}, X+n-1, 2) \overset{(3.6)\text{ i }(5.15)}{\leq} A(z_f, X+n, 2)$.

ii. $\max(n-1, X) \geq 4$. Wtedy oczywiście $\max(n-1, X) \geq X+n-1$ i zachodzi:

$$\begin{aligned} \max(n-1, X) &\overset{(3.4)}{<} A(z_f, \max(n-1, X), 2) \\ &\overset{(3.1)}{\leq} A(z_f, X+n-1, 2), \\ f(n-1, x_1, \ldots, x_k) &\overset{(5.16)}{<} A(z_f, X+n-1, 2), \end{aligned}$$

skąd $X' \leq A(z_f, X+n-1, 2)$.

W obu przypadkach 2(b)i oraz 2(b)ii otrzymaliśmy, że

$$X' < A(z_f, X+n-1, 2). \tag{5.17}$$

Teraz mamy:

$$\begin{aligned} f(n, x_1, \ldots, x_k) &= h(n-1, f(n-1, x_1, \ldots, x_k), x_1, \ldots, x_k) \\ &\overset{(5.8)}{<} A(z_h, X', 2) \overset{(3.6)\text{ i }(5.15)}{\leq} A(z_f - 1, X', 2) \\ &\overset{(3.1)\text{ i }(5.17)}{\leq} A(z_f - 1, A(z_f, X+n-1, 2), 2) \overset{(A5)}{=} A(z_f, X+n, 2). \end{aligned}$$

W obu przypadkach 2a oraz 2b otrzymaliśmy $f(n, x_1, \ldots, x_k) < A(z_f, X+n, 2)$, co kończy krok indukcyjny.

□

Lemat 12. *Jeśli $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ jest pierwotnie rekurencyjna, to istnieje stała $z_f \geq 2$ taka, że dla wszystkich $x_1, \ldots, x_k$, że $\max(x_1, \ldots, x_k) \geq 4$, zachodzi:*

$$f(x_1, \ldots, x_k) < A(z_f, \max(x_1, \ldots, x_k), 2). \tag{5.18}$$

Dowód. Indukcja względem długości definicji funkcji f.

1. Długość definicji jest równa 1. Wtedy definicja jest postaci (PR1)-(PR3).
   - (PR1). Wystarczy przyjąć $z_f = 2$. Wtedy dla $x \geq 2$ mamy $f(x) = x + 1 \overset{(2.7)}{<} 2^x \overset{(1.3)}{=} A(2, x, 2)$.
   - (PR2). Wystarczy przyjąć $z_f = 2$. Wtedy $f(x_1, \ldots, x_n) = 0 < 2^0 \overset{(1.3)}{=} A(2, 0, 2) \overset{(3.1)}{\leq} A(2, \max(x_1, \ldots, x_n), 2)$.
   - (PR3). Wystarczy przyjąć $z_f = 2$. Wtedy $f(x_1, \ldots, x_n) = x_i \overset{(2.4)}{<} 2^{x_i} \overset{(1.3)}{=} A(2, x_i, 2) \overset{(3.1)}{\leq} A(2, \max(x_1, \ldots, x_n), 2)$.
2. W przypadku, gdy definicja f jest postaci (PR1)-(PR3) to postępujemy jak w punkcie 1. Rozpatrzmy pozostałe dwa przypadki.

- (PR4). Zakładamy, że funkcje $h, g_1, \ldots, g_k$ spełniają własność (5.18). Wtedy teza wynika bezpośrednio z lematu 10.
- (PR5). Zakładamy, że funkcje g, h spełniają własność (5.18). Z lematu 11 mamy, że istnieje stała z'_f taka, że

$$\begin{aligned} f(n, x_1, \ldots, x_k) < A(z'_f, \max(x_1, \ldots, x_k) + n, 2) \\ \text{dla } \max(n, x_1, \ldots, x_k) \geq 4. \end{aligned} \tag{5.19}$$

Wystarczy przyjąć $z_f = z'_f + 1$. Wobec oczywistej nierówności

$$\max(x_1, \ldots, x_k) + n \leq 2\max(n, x_1, \ldots, x_k)$$

mamy

$$\begin{aligned} f(n, x_1, \ldots, x_k) &< A(z'_f, \max(x_1, \ldots, x_k) + n, 2) \\ &\overset{(3.1)}{\leq} A(z'_f, 2\max(n, x_1, \ldots, x_k), 2) \\ &\overset{(3.14)}{\leq} A(z_f, \max(n, x_1, \ldots, x_k), 2), \end{aligned}$$

a to jest teza.

□

Twierdzenie 6. *Funkcja Ackermana nie jest pierwotnie rekurencyjna.*

Dowód. Załóżmy, że $A \in PR$. Niech $g_1(x) = g_2(x) = x$ i $g_3(x) = 2$. $g_1, g_2 \in PR$ z własności (PR3), a $g_3 \in PR$ z lematu 8. Definiujemy funkcję:

$$f(x) = A(g_1(x), g_2(x), g_3(x)) = A(x, x, 2). \tag{5.20}$$

Z własności (PR4) mamy $f \in PR$, więc na mocy lematu 12 istnieje stała $z_f \geq 2$, że dla $x \geq 4$ zachodzi $f(x) < A(z_f, x, 2)$. Dla $x \geq z_f$ mamy

$$f(x) < A(z_f, x, 2) \overset{(3.6)}{\leq} A(x, x, 2),$$

co jest sprzeczne z (5.20). □