# Teoria złożoności obliczeniowej

## Problemy obliczeniowe

### Obliczeniowy problem decyzyjny.

Może być przedstawiony jako język $L \subseteq \Sigma^*$.

#### Przykłady

- Liczby pierwsze

  $\{w \in \{0,1\}^* : w \text{ jest binarnym przedstawieniem liczby pierwszej}\}$

- Grafy ze ścieżką Hamiltona

$$\{w \in \{0,1\}^* : \begin{array}{l} |w| = n^2 \text{ dla pewnego } n \text{ i} \\ \exists 1 \leq a_1, \ldots, a_n \leq n \\ w_{n \cdot a_i + a_{i+1}} = 1 \text{ dla } i = 1, \ldots, n-1\} \end{array}$$

### Obliczeniowy problem funkcyjny.

Może być przedstawiony jako funkcja $f : \Sigma^* \to \Gamma^*$.

## Klasy złożoności

**Czasowa złożoność wielomianowa:** $P$

Problem $L \subseteq \Sigma^*$ jest w klasie $P$ jeśli istnieje maszyna Turinga $M$ i stała $k$ taka, że $L = L(M)$ i dla każdego $w$ maszyna $M$ wykonuje $\leq |w|^k$ kroków.

**Czasowa niedeterministyczna złożoność wielomianowa:** $NP$

Problem $L \subseteq \Sigma^*$ jest w klasie $NP$ jeśli istnieje język $R \subseteq \Sigma^*\$\Sigma^*$ w klasie $P$ i stała $k$, takie że

$$L = \{w : (\exists v \in \Sigma^*)\, w\$v \in R \wedge |v| \leq |w|^k\}$$

Równoważnie: $L = L(M)$ dla pewnej *niedeterministycznej* maszyny Turinga działającej w czasie wielomianowym.

**Pamięciowa złożoność wielomianowa:** $PSPACE$

Problem $L \subseteq \Sigma^*$ jest w klasie $PSPACE$ jeśli istnieje maszyna Turinga $M$ i stała $k$ taka, że $L = L(M)$ i dla każdego $w$ maszyna $M$ odwiedza $\leq |w|^k$ komórek pamięci.

Wiadomo:

$$P \subseteq NP \subseteq PSPACE$$

Hipoteza:

$$P \neq NP \neq PSPACE$$

**Klasa funkcji obliczalnych w czasie wielomianowym:** $FP$

Funkcja $f : \Sigma^* \to \Gamma^*$ jest w klasie $FP$ jeśli istnieje stała $k$ i maszyna Turinga $M$ obliczająca $f(w)$ w $\leq |w|^k$ krokach (w szczególności $|f(w)| \leq |w|^k$).

## Redukcje pomiędzy problemami

Problem $A \subseteq \Sigma^*$ *redukuje się* do problemu $B \subseteq \Gamma^*$ w czasie wielomianowym (w sensie Karpa) jeśli istnieje funkcja $f : \Sigma^* \to \Gamma^*$ w klasie $FP$ (redukcja), taka, że, dla każdego $w \in \Sigma^*$,

$$w \in A \;\Leftrightarrow\; f(w) \in B$$

## Problemy $NP$–zupełne

Problem $L$ jest $NP$–zupełny jeśli:

1. $L \in NP$,
2. każdy problem $M \in NP$ redukuje się do $L$ w czasie wielomianowym.

**Przykłady problemów $NP$–zupełnych:**

- $SAT$ — problem spełnialności formuł Boole'owskich (twierdzenie Cooka).
- $3\text{–}CNF\text{–}SAT$ — problem spełnialności formuł Boole'owskich w postaci koniunkcyjno–dyzjunkcyjnej, gdzie każda koniunkcja ma 3 literały.
- Problem spełnialności sieci logicznych.
- Grafy Hamiltonowskie.
- Pary $\langle G, k \rangle$, takie, że graf $G$ można pokolorować $k$ kolorami.
- Grafy kolorowalne 3 kolorami.
- Grafy planarne kolorowalne 3 kolorami.
- Problem plecakowy: układ liczb $M$, $a_1, \ldots, a_n$ (danych w postaci binarnej), takich, że istnieją $\beta_1, \ldots, \beta_n \in \{0, 1\}$, takie że

$$M \;=\; \beta_1 \cdot a_1 + \ldots + \beta_n \cdot a_n$$