JAO. Zadania z gwiazdką II seria. Termin rozwiązania: 25 stycznia 2005

Rozwiązania jedynie w postaci wydruku lub elektronicznie .ps lub .pdf

1. (0.25 punkta) Dowieść, że dla każdego automatu ze stosem A istnieje stała C (zależna od automatu) taka, że dla każdego słowa $w \in Z(A)$ istnieje obliczenie akceptujące przez pusty stos o długości $\leq C|w|$. Wskazówka: oszacować wysokość stosu w obliczeniu akceptującym.

2. (0.25 pt) Rozstrzygnąć, czy klasa języków bezkontekstowych jest zamknięta na operacje $\frac{1}{2}L$ i $\sqrt{L}$.

   Dla języka $L \subseteq \Sigma^*$, $\frac{1}{2}L =_{df} \{w \,:\, (\exists u)\, |u| = |w| \wedge wu \in L\}$ i $\sqrt{L} =_{df} \{w \,:\, ww \in L\}$.

3. (0.5 pt) Udowodnić, że maszyna Turinga o jednej taśmie z następującym ograniczeniem *write once*

   > maszyna może zastąpić symbol *blank* (B) innym symbolem, ale raz wpisanego symbolu nie może już nigdy zmienić

   akceptuje język regularny.

   Jak zmieni się sytuacja, jeśli pozwolimy maszynie zastąpić dowolny symbol przez inny (ale tylko raz)?

4. (0.5 pt) Udowodnić, że maszyna Turinga o jednej taśmie pracująca w czasie liniowym (tzn. dla pewnej stałej C, dla dowolnego słowa w, maszyna wykonuje $C \cdot |w|$ kroków) akceptuje język regularny.

5. (1.5 pt) Dla n naturalnego rozważamy automat A_n o stanach $\{1, \ldots, n\}$, alfabecie wejściowym $\{a_{i,j} \,:\, 1 \leq i, j \leq n\}$ i przejściach $i \xrightarrow{a_{i,j}} j$, dla $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. Stanem początkowym i zarazem akceptującym jest 1. Dowieść, że dla pewnej stałej $c > 1$, dla nieskończenie wielu n, dowolne wyrażenie regularne opisujące język $L(A_n)$ ma długość co najmniej c^n.

6. (1 pt) Dowieść, że jeśli M jest deterministyczną maszyną Turinga i $L(M)$ nie jest językiem regularnym, to istnieje stała c taka, że dla nieskończenie wielu słów w, maszyna M wykorzystuje co najmniej $c \cdot \log \log |w|$ komórek pamięci.

7. (0.25 pt) Dowieść, że problem, czy dana gramatyka bezkontekstowa generuje język regularny jest algorytmicznie nierozstrzygalny.

8. (0.75 pt) Udowodnić, że nie istnieje maszyna Turinga, która zatrzymuje się dla każdych danych i oblicza funkcję $f : \{0,1\}^* \to \{0,1\}^*$ o następującej własności.

   > Jeśli zbiór $L(M_w)$ jest obliczalny, to $L(M_w) = L(M_{f(w)})$ i $M_{f(w)}$ zatrzymuje się dla każdych danych.

   Intuicyjnie: hipotetyczna maszyna ,,poprawiałaby" maszyny Turinga ,,przynajmniej tam, gdzie się da" do takich, które się zawsze zatrzymują.