Języki, Automaty i Obliczenia

Zadania egzaminacyjne

Damian Niwiński

Egzamin zerowy 1994/1995

1. Pan X postanowił, że każdego dnia będzie pracował lub nie, przestrzegając przy tym zasady, by na żadne siedem kolejnych dni nie przypadało więcej niż cztery dni pracy. Możliwy rozkład dni pracy pana X w ciągu n kolejnych dni możemy przedstawić jako n-bitowe słowo, gdzie 1 odpowiada dniowi pracy, a 0 dniowi odpoczynku. Dowieść, że zbiór wszystkich tak otrzymanych słów jest językiem regularnym (nad alfabetem $\{0,1\}$). Znaleźć minimalny automat deterministyczny.

2. Dowieść, że dla dowolnego języka regularnego L, język

$$\{w \,:\, w^{|w|} \in L\}$$

jest również regularny.

3. Rozważamy alfabet $\{1,+,*,=\}$. Czy następujące języki są bezkontekstowe?

   (a) $\{1^x + 1^y = 1^z \,:\, x+y=z\}$

   (b) $\{1^x * 1^y = 1^z \,:\, x \cdot y = z\}$

4. Rozważamy formuły rachunku zdań z jedną zmienną zdaniową X. Dowieść, że następujące zbiory tworzą języki bezkontekstowe:

   (a) zbiór formuł spełnialnych (tj. takich, że istnieje wartościowanie zmiennej X przy którym formuła jest prawdziwa),

   (b) zbiór tautologii (tj. formuł prawdziwych dla każdego wartościowania zmiennej X).

   Uwaga. Formuły można rozważać w notacji in-fiksowej (tj. klasycznej) lub w notacji polskiej, pre-fiksowej bądź post-fiksowej, **do wyboru**.

5. Powiemy, że maszyna Turinga jest *write-once* jeśli może pisać tylko w pustych komórkach taśmy, a symbol raz napisany nie może być zastąpiony żadnym innym symbolem (w szczególności nie może być "zmazany" tj. zastąpiony przez "blank"). Dla dowolnej maszyny Turinga z jedną taśmą, skonstruować maszynę *write-once* z nie więcej niż trzema taśmami, która akceptuje ten sam język. (Wolno powiększyć również alfabet roboczy.)

Egzamin – 1 termin, 1994/1995

1. Pan X zakupił pakiety trzech różnych akcji: A, B i C. Każdego dnia bada wzajemne położenie wartości swoich akcji, które może być reprezentowane jako *uporządkowanie* zbioru $\{A, B, C\}$, w kierunku od najmniej do najbardziej wartościowej. (Przyjmujemy założenie, że dwie różne akcje mają zawsze *różne* wartości.) Pan X postanowił, że jeśli w ciągu dwóch kolejnych dni któraś z akcji dwukrotnie spadnie na niższą pozycję, to sprzeda tę akcję. Np. jeśli kolejne notowania (w tym wypadku: uporządkowania) są $(A, B, C), (B, C, A), (C, B, A)$ to pan X sprzeda pakiet akcji C. Rozważamy zbiór G wszystkich uporządkowań liniowych zbioru $\{A, B, C\}$. Dowieść, że zbiór tych ciągów nad alfabetem G, które opisują takie wyniki notowań giełdowych, przy których pan X nie pozbędzie się żadnego pakietu akcji, jest językiem regularnym. Znaleźć liczbę stanów automatu minimalnego akceptującego ten język.

2. Przypomnijmy, że zbiór wyrażeń regularnych nad alfabetem Σ oznaczamy $R(\Sigma)$, oraz że, dla $r \in R(\Sigma)$, $L[r] \subseteq \Sigma^*$ jest językiem opisywanym przez r. Które z poniższych języków są regularne lub bezkontekstowe:

   (a) $\{r \in R(\Sigma) \, : \, L[r] \neq \emptyset\}$,
   (b) $\{r \in R(\Sigma) \, : \, L[r]$ jest nieskończony $\}$,
   (c) dla $a \in \Sigma$, $\{r \in R(\Sigma) \, : \, L[r] \cap \Sigma^* a \Sigma^* \neq \emptyset\}$, (tzn. symbol a występuje w jakimmś słowie z $L[r]$),
   (d) $\{ar \, : \, r \in R(\Sigma)$ oraz $L[r] \cap \Sigma^* a \Sigma^* \neq \emptyset\}$
   (e) $\{r\$s \, : \, r, s \in R(\Sigma)$ oraz $L[r] = L[s]\}$,
   (f) $\{ar \, : \, r \in R(\Sigma)$ oraz $L[r] \cap \Sigma^* a \Sigma^* \neq \emptyset\}$
   (g) $\{r\$s^R \, : \, r, s \in R(\Sigma)$ oraz $L[r] = L[s]\}$.

3. Określamy następujący język nad alfabetem $\{0, 1\}$.

$$L = \{\underbrace{11\ldots1}_{n}0\underbrace{1\ldots1}_{m_1}0\ldots\underbrace{1\ldots1}_{m_k} \, : \, m_1 + \ldots + m_k = n\}$$

   - Czy L jest regularny?
   - Czy L jest bezkontekstowy?

4. **bis** Niech $L \subseteq \Sigma$ będzie językiem regularnym. Określamy język nad alfabetem $\Sigma \cup \{\sharp\}$.

$$L = \{w\sharp w_1\sharp w_2\sharp\ldots\sharp w_m \, : \, w, w_1, \ldots, w_m \in L \wedge m = |w|\}$$

   - Czy L jest regularny?
   - Czy L jest bezkontekstowy?

5. **bis bis** Niech $L \subseteq \Sigma$ będzie językiem regularnym. Określamy język nad alfabetem $\Sigma \cup \{\sharp\}$.

$$L = \{w\sharp w_1\sharp w_2\sharp\ldots\sharp w_m \, : \, m \in N \, w, w_1, \ldots, w_m \in L \wedge |w_1| + \ldots + |w_m| = |w|\}$$

- Czy L jest regularny?
- Czy L jest bezkontekstowy?

Języki, Automaty i Obliczenia. Egzamin – 2 termin, 1994/1995

1. Niech L będzie zbiorem słów $w \in \{a,b\}^*$, które zawierają przynajminiej jedno wystąpienie symbolu b, przy czym bezpośrednio przed *ostatnim* wystąpieniem symbolu b w słowie w musi wystąpić symbol a. Dowieść, że L jest językiem regularnym. Podać liczbę stanów minimalnego automatu deterministycznego rozpoznającego język L. Skonstruować wyrażenia regularne opisujące każdą z klas abstrakcji relacji $\sim_L$ z twierdzenia Myhill'a–Nerode'a wyznaczonej przez L.

2. Jakie z następujących języków są regularne, a jakie bezkontekstowe ale nie regularne?

   (a) Zbiór słów nad alfabetem $\{a,b\}$, w których a występuje tyle samo razy co b.

   (b) Zbiór słów nad alfabetem $\{a,b\}$, takich, że w każdym bloku kolejnych 10 liter (o ile słowo jest długości co najmniej 10), a występuje tyle samo razy co b.

   (c) Zbiór słów nad alfabetem $\{a,b\}$, w których liczba wystąpień a jest kwadratem liczby wystąpień b.

3. Dla słowa $w \in \{a,b\}^*$, określamy $\sigma(w)$ jako zbiór wszystkich permutacji słowa w, tzn. , gdy $w = w_1 \ldots w_m$, gdzie $w_1, \ldots, w_m \in \{a,b\}$, to

   $$\sigma(w) \quad = \quad \{w_{f(1)}w_{f(2)} \ldots w_{f(m)} \ : \ f \text{ jest permutacją zbioru } \{1,\ldots,n\} \ \}$$

   Dla $L \subseteq \{a,b\}^*$,

   $$\sigma(L) \quad = \quad \bigcup_{w \in L} \sigma(w)$$

   - Czy dla dowolnego języka regularnego L, $\sigma(L)$ jest językiem bezkontekstowym ? (Wskazówka : czy $\sigma(\{a^n(bc)^n \ : \ n \in N\})$ jest językiem bezkontekstowym ?)
   - Czy dla dowolnego języka regularnego L, $\sigma(L)$ jest językiem regularnym?

Języki, Automaty i Obliczenia. Rok 3

Egzamin 1994. Test

1. Ile stanów ma minimalny automat deterministyczny nad alfabetem wejściowym $\{a,b\}$, akceptujący zbiór słów w takich, że $|w| \geq 1994$?

   (a) 1995

   (b) 1996

   (c) 2^{1994}

(d) nieskończenie wiele stanow

2. Rozważamy następujący problem algorytmiczny. Dane: słowo w i wyrażenie regularne r. Pytanie: czy $w \in L[r]$.

   (a) Można zawsze skonstruować deterministyczny automat akceptujący $L[r]$ o $O(|r|)$ stanach i rozstrzygnąć powyższy problem w $O(|w| \cdot |r|)$ krokach.

   (b) Istnieje algorytm rozwiązujący problem w $|w||r|^3$ krokach.

   (c) Dla pewnych wyrażeń regularnych nie istnieje algorytm rozwiązujący ten problem.

   (d) Istnieje algorytm rozwiązujący problem w $|w|^2$ krokach (długość r nie ma znaczenia).

3. Niech $L, M \subseteq \Sigma^*$. Jeśli $L = M^*$, to

   (a) $L = M$

   (b) może być $L \neq M$, ale na pewno jeden ze zbiorów jest zawarty w drugim

   (c) na pewno $L \neq M$

   (d) $L^* = (L \cup M)^*$

4. Jeśli $L \subseteq \Sigma^*$ jest bezkontekstowy a $R, S\Sigma^*$ są regularne, to

   (a) $(L^{-1}R)S$ jest bezkontekstowy, ale może nie być regularny

   (b) $((SL^{-1})^{-1}L)R^{-1}$ jest bezkontekstowy

   (c) $R^* - S^*$ jest bezkontekstowy, ale może nie być regularny

   (d) $L^* - S^*$ jest bezkontekstowy, ale może nie być regularny

5. Niech $L \subseteq \Sigma^*$ będzie językiem regularnym. Wówczas

   (a) istnieje stała $M > 0$, taka że $(\forall w \in L)|w| > M \Rightarrow ww \in L$

   (b) $(\exists M > 0)\,(\forall w \in \Sigma^*)(w \in L \wedge |w| \geq M) \Rightarrow (\exists x, y, z)(w = xyz \wedge xy^*z \subseteq L$

   (c) $(\exists M > 0)\,(\forall w \in \Sigma^*)(w \in L \wedge |w| \geq M) \Rightarrow (\forall x)(\exists y, z)\,(w = xyz \Rightarrow xy^*z \subseteq L$

   (d) $(\exists M > 0)\,(\forall w \in \Sigma^*)w^M \in L$

6. Jeśli skonczony automat niedeterministyczny akceptujacy jezyk $L \subseteq \Sigma^*$ ma k stanów, to minimalny automat deterministyczny akceptujący język LL

   (a) ma co najmniej 2^k stanów

   (b) ma nie więcej niż 4^k stanów

   (c) może nie istnieć

   (d) ma dokładnie $|\Sigma|^k$ stanów

7. Istnieje algorytm, który mając na wejściu automat ze stosem nad alfabetem Σ,

(a) oblicza liczbę stanów automatu
(b) sprawdza, czy $L(A) = \Sigma^*$
(c) sprawdza, czy $L(A)$ jest nieskończony
(d) znajduje gramatykę bezkontekstową taką, że $L(G) = \Sigma^* - L(A)$

8. Niech M będzie maszyną Turinga, A – automatem skończonym, a B – automatem ze stosem. Wówczas

   (a) zbiór $(L(M) - L(A))L(B)$ jest częściowo obliczalny
   (b) zbiór $L(A) - L(M)$ jest bezkontekstowy
   (c) zbiór $L(B) - L(A)$ jest bezkontekstowy
   (d) zbiór $(L(A)\,(L(M))^{-1})\,(L(B))^{-1}$ jest regularny

9. Które z następujących wyrażeń regularnych opisują język akceptowany przez wskazany automat:

   (a) $(00(010)^*00(0+1))^* + (1(010)^*00(0+1))^*$
   (b) $(((((0+1)^* + 1)^* + 1)^* + 1)^* + 1)^*$
   (c) $(00(010)^*00(0+1) + 1(010)^*00(0+1))^*$
   (d) $(0000(0+1) + 100(0+1) + 0001000(0+1) + 10100(0+1))^*$

10. Niech $L \subseteq \Sigma^*$. Określamy relację $\sim^R$ następująco:

$$w \sim^R v \;\Leftrightarrow\; ((\forall u \in Sigma^*) uw \in L \Leftrightarrow uv \in L)$$

   (a) $\sim^R$ nie jest relacją równoważności
   (b) jeśli relacja $\sim^R$ ma skończenie wiele klas abstrakcji, to L jest skończony
   (c) jeśli L jest bezkontekstowy, to relacja $\sim^R$ ma skończenie wiele klas abstrakcji
   (d) relacja $\sim^R$ ma skończenie wiele klas abstrakcji $\Leftrightarrow$ L jest regularny

JAO. Egzamin zerowy. 1995/1996

1. Trzy drużyny piłkarskie A, B i C rozgrywają między sobą serię spotkań towarzyskich, przy czym umówiły się, że każdy kolejny mecz jest rozgrywany pomiędzy drużyną, która wygrała poprzedni mecz i drużynę, która nie brała udziału w tym meczu (tzn. jeśli drużyna X wygrała z drużyną Y, to następne spotkanie rozegra drużyna X z drużyną Z). Zakładamy, że **nie ma remisów**. Rozważamy zbiór słów nad alfabetem $\{A, B, C\}$, stanowiących możliwe ciągi zwycięzców kolejnych spotkań. Dowieść, że ten język jest regularny. Zbudować minimalny automat deterministyczny, który go rozpoznaje.

2. (*) Dowieść, że jeśli L jest językiem regularnym nad dowolnym alfabetem Σ, to język
$$\{1^n \ : \ \text{liczba } |L \cap \Sigma^n| \text{ jest parzysta } \}$$
jest również językiem regularnym.

3. Zbadać, które z następujących języków są regularne lub bezkontekstowe. Odpowiedź (pozytywną lub negatywną) należy uzasadnić.

   (a)
   $$\{0^x 10^y 10^z 10^w \ : \ x + z = y + w\}$$

   (b) zbiór słów nad alfabetem $\{a, b\}$, w których sekwencja ab występuje tyle samo razy, co sekwencja ba
   (bardziej formalnie, liczba pozycji i w słowie $w = w_1 w_2 \dots w_n$, takich że $w_i = a$ i $w_{i+1} = b$, oraz liczba pozycji j, takich, że $w_j = b$ i $w_{j+1} = a$, są równe);

   (c) zbiór słów nad alfabetem $\{a, b, c\}$, postaci
   ww^R, gdzie ponadto w jest palindromem.

4. Niech M będzie maszyną Turinga nad alfabetem $\{0, 1\}$, taką, że $L(M) = \{0, 1\}^*$. Określamy funkcję $T : \{0, 1\}^* \longrightarrow \{0, 1\}^*$ w ten sposób, że $T(w)$ jest liczbą kroków, jakie maszyna M wykonuje dla słowa wejściowego w, zapisaną w postaci binarnej. Skonstruować maszynę M_1 obliczającą funkcję T. Oszacować złożoność czasową skonstruowanej maszyny M_1.

JAO. Pierwszy termin – zadania. 1995/1996

1. Punkt A porusza się po siatce sześcianu o wierzchołkach $(0, 0, 0), (0, 0, 1), (0, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 0), (1, 0, 1), (1, 1, 0), (1, 1, 1)$ (w R^3). Z każdego wierzchołka, punkt A może wykonać trzy ruchy, odpowiadające przemieszczeniom w kierunku osi $0x$, osi $0y$ i osi $0z$, ruchy te nazwiemy właśnie x, y i z, oodpowiednio.

   Innymi słowy, ruch x powoduje zmianę położenia z (i, j, k) na $(i + 1 \bmod 2, j, k)$, ruch $y : (i, j, k) \rightsquigarrow (i, j + 1 \bmod 2, k)$, ruch $z : (i, j, k) \rightsquigarrow (i, j, k + 1 \bmod 2)$.

   Zakładamy, że w chwili początkowej punkt A znajduje się w położeniu $(0, 0, 0)$.

   Każde słowo nad alfabetem $\{x, y, z\}$ wyznacza pewną trasę punktu A po siatce sześcianu. Rozważamy zbiór słów odpowiadających takim trasom, że w ciągu każdych czterech kolejnych chwil punkt A przynajmniej raz dotknie podstawy sześcianu, tzn. co najmniej jedno z czterech kolejnych położeń jest postaci $(i, j, 0)$.

   Dowieść, że jest to język regularny i zbudować minimalny automat deterministyczny rozpoznający ten język.

2. Dowieść, że jeżeli $L \subseteq \Sigma^*$ jest językiem regularnym, to
$$\{w \in \Sigma^* \ : \ \text{istnieje nieskończenie wiele } n \in N, \text{ takich że } w^n \in L\}$$
też jest językiem regularnym.

3. Niech $\mathcal{E}$ będzie zbiorem wyrażeń generowanych przez gramatykę

$$X \to 1 \,|\, (X + X) \,|\, (X \star X)$$

Czy następujący język jest bezkontekstowy ?

(a) zbiór słów postaci $E_1 = E_2$, gdzie $E_1, E_2 \in \mathcal{E}$ i równość $E_1 = E_2$ zachodzi w pierścieniu Z_2 (wszystkie działania *modulo* 2);

(b) zbiór słów postaci $E_1 = E_2$, gdzie $E_1, E_2 \in \mathcal{E}$ i równość $E_1 = E_2$ zachodzi w zbiorze liczb naturalnych N.

4. Niech M będzie maszyną Turinga i niech Q będzie zbiorem stanów maszyny M. Rozważamy zbiór wszystkich możliwych obliczeń maszyny M, dla wszystkich możliwych słów wejściowych. Z każdym skończonym fragmentem początkowym takiego obliczenia, powiedzmy $C_0 \vdash_M C_1 \vdash_M \ldots \vdash_M C_n$, wiążemy ciąg stanów, jakie występują w kolejnych konfiguracjach $C_0, C_1, \ldots, C_n$. Otrzymujemy w ten sposób pewien język nad alfabetem Q.

Czy ten język jest bezkontekstowy ?

JAO. Pierwszy termin – test. 1995/1996

1. Opisać za pomocą wyrażenia regularnego zbiory słów nad alfabetem $\{0, 1\}$ o następujących własnościach :

(a) symbol 0 występuje co najwyżej dwa razy;

(b) symbol 0 nie występuje nigdy przed symbolem 1;

(c) każde dwa sąsiadujące ze sobą symbole są różne;

(d) symbol 1 występuje nieparzystą liczbę razy.

2. Podać przykład języka, który jest bezkontekstowy, ale nie jest regularny.

3. Podać przykład języka, który jest obliczalny, ale nie jest bezkontekstowy.

4. Podać przykład języka, który jest częściowo obliczalny, ale nie jest obliczalny.

5. Podać przykład języka, który nie jest częściowo obliczalny (tzn. nie jest rozpoznawany przez żadną maszynę Turinga).

6. Podać przykład problemu NP–zupełnego.

7. Które z poniższych stwierdzeń są prawdziwe? (Przy każdym zdaniu, proszę napisać TAK lub NIE.)

   (a) Deterministyczna maszyna Turinga zatrzymuje się dla każdego słowa wejściowego.

   (b) Niedeterministyczna maszyna Turinga może mieć więcej niż jedno obliczenie dla tego samego słowa wejściowego.

   (c) Niedeterministyczna maszyna Turinga, to taka maszyna Turinga, która ma obliczenia nieskończone.

   (d) Niedeterministyczny automat skończony, to taki automat, który nie jest deterministyczny.

8. Dla których z następujących problemów istnieje algorytm rozwiązujący problem ?

   (Proszę odpowiedzieć TAK lub NIE.)

   (a) Dane : dwie gramatyki bezkontekstowe G_1 i G_2.
   Pytanie : czy $L(G_1) = L(G_2)$?

   (b) Dane : gramatyka bezkontekstowa G i wyrażenie regularne R.
   Pytanie : czy $L(G) \cap L[R] \neq \emptyset$?

   (c) Dane : wyrażenie regularne R.
   Znaleźć minimalny automat deterministyczny rozpoznający język $L[R]$.

   (d) Dane : niedeterministyczny automat skończony A.
   Znaleźć wyrażenie regularne opisujące lustrzane odbicie języka $L(A)$.

9. Które z następujących języków są regularne ? (Proszę odpowiedzieć TAK lub NIE.)

   (a) Zbiór słów, jakie mogą być identyfikatorami w języku Pascal;

   (b) Zbiór wyrażeń bez symboli identyfikatorów, reprezentujących liczby rzeczywiste w języku Pascal;

   (c) Zbiór poprawnie zbudowanych procedur w języku Pascal.

   (d) Zbiór słów stanowiących poprawnie zbudowane kody jednotaśmowych maszyn Turinga z alfabetem $0, 1, B$ (określone jak na wykładzie).

10. Które z następujących języków są bezkontekstowe? (Proszę odpowiedzieć TAK lub NIE.)

   (a) Zbiór wyrażeń regularnych nad alfabetem $\{0, 1\}$.

   (b) Zbiór deklaracji zmiennych w języku Pascal nie używających identyfikatorów typów ani identyfikatorów stałych innych niż standardowe.

   (c) Zbiór wyrażeń arytmetycznych w języku Pascal nie używających identyfikatorów funkcji innych niż standardowe.

   (d) Zbiór wszystkich programów w języku Pascal.

11. Jeśli A jest automatem niedeterministycznym o n stanach rozpoznającym język L, to minimalny automat deterministyczny rozpoznający L ma (proszę wpisać TAK lub NIE w zależności od tego, czy hipoteza jest zawsze prawdziwa)

    (a) n^2 stanów;

    (b) dokładnie 2^n stanów;

    (c) nie więcej niż 2^n stanów;

    (d) może nie istnieć.

12. Dla następującej gramatyki, znaleźć równoważną gramatykę w postaci Chomsky'ego :

    $X \to XYY \mid a$

    $Y \to Z \mid \epsilon$

    $Z \to a.$

13. Które z poniższych stwierdzeń są prawdziwe? (Przy każdym zdaniu, proszę napisać TAK lub NIE.)

    (a) Jeśli język jest rozpoznawany przez niedeterministyczną maszynę Turinga o złożoności pamięciowej ograniczonej przez wielomian, to, z twierdzenie Savitcha, jest rozpoznawany przez deterministyczną maszynę o złożoności pamięciowej $O(n^2)$.

    (b) Każde dwa problemy NP–zupełne redukują się do siebie wzajemnie w sensie Karpa (tzn. w czasie wielomianowym).

    (c) Każdy język obliczalny jest albo w klasie P, albo w klasie NP.

    (d) Jeśli problem plecakowy należy do klasy P, to $NP = P$.

    Uwaga. P — klasa języków rozpoznawanych przez deterministyczne maszyny Turinga w czasie wielomianowym; NP — klasa języków rozpoznawanych przez niedeterministyczne maszyny Turinga w czasie wielomianowym.