J"ezyki, Automaty i Obliczenia. Odcinek 4

Automaty ze stosem. Własności języków bezkontekstowych

Damian Niwiński

Listopad 1996

1 Automaty ze stosem

1.1 Podstawowe definicje

Automat ze stosem może być przedstawiony jako następujący układ:

$$A = (\Sigma, \Gamma, Q, q_I, Z_I, \delta, F)$$

gdzie

- Σ jest *alfabetem symboli wejściowych*,
- Γ jest *alfabetem symboli stosowych*,
- Q jest zbiorem stanów,
- $q_I \in Q$ jest stanem początkowym,
- $Z_I \in \Gamma$ jest *symbolem startowym*,
- $\delta \subseteq Q \times (\Sigma \cup \{\epsilon\}) \times \Gamma \times Q \times \Gamma^*$ jest relacją przejścia,
- $F \subseteq Q$ jest zbiorem stanów akceptujących.

Wszystkie występujące tu zbiory są skończone.

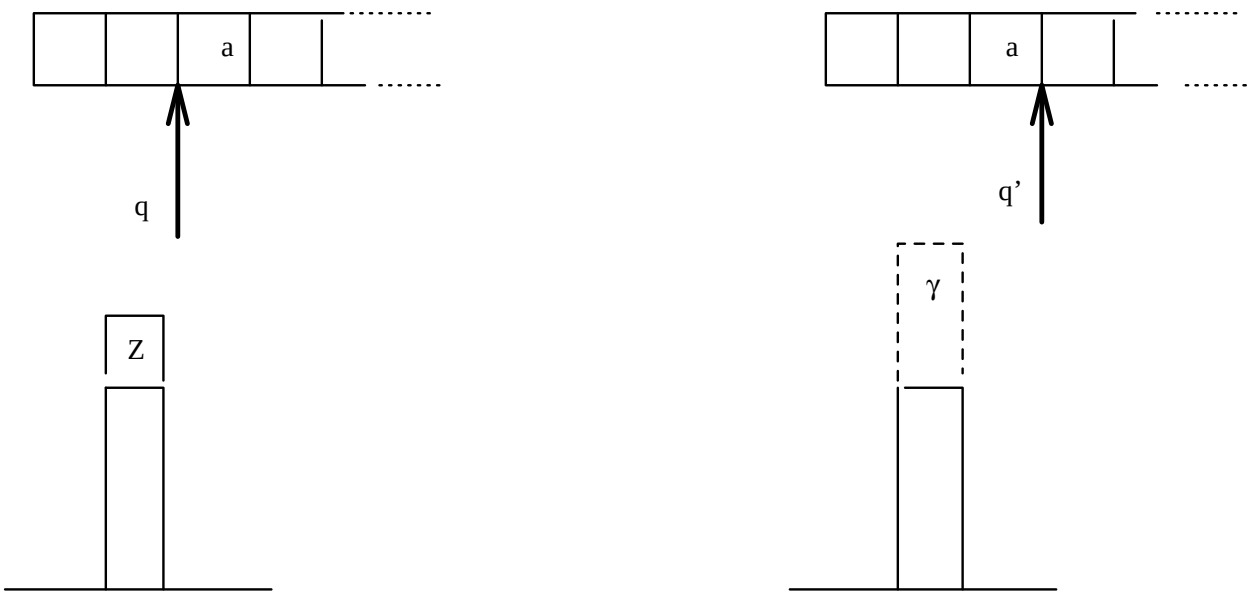
Przejście postaci (q, a, Z, q', γ) będziemy także zapisywać

$$q, a, Z \rightarrow_A q', \gamma$$

Należy je rozumieć następująco:

Gdy $a \in \Sigma$:

Jeżeli automat znajduje się w stanie q, głowica automatu czyta na taśmie symbol a, a na wierzchołku stosu znajduje się symbol Z, to w następnej chwili czasu automat może zmienić stan na q', zastąpić symbol Z na stosie przez słowo γ i przesunąć głowicę o jedno miejsce w prawo.



Gdy $a = \epsilon$:

Jeżeli automat znajduje się w stanie q, a na wierzchołku stosu jest symbol Z, to w następnej chwili automat może zmienić stan na q' i zastąpić symbol Z na stosie przez słowo γ. Pozycja głowicy pozostaje przy tym nie zmieniona.

Zauważmy, że jeśli w rozważanym powyżej przejściu $\gamma = Z'Z$, to operację na stosie można określić jako

połóż Z' na stos,

a jeśli $\gamma = \epsilon$, to jako

zdejmij symbol z wierzchołka stosu.[1]

Konfigurację automatu w danej chwili czasu możemy przedstawić jako trójkę (q, w, γ), gdzie $q \in Q$, $w \in \Sigma^*$, $\gamma \in \Gamma^*$. Należy przez to rozumieć sytuację, kiedy automat znajduje się w stanie q, w jest słowem, jakie pozostało jeszcze do przeczytania, a γ jest zawartością stosu, przy czym przyjmujemy, że pierwsza litera słowa γ odpowiada symbolowi na wierzchołku stosu itd.

Za konfigurację *początkową* uważamy każdą konfigurację postaci

$$(q_I, w, Z_I)$$

[1] Można wykazać, że automaty ze stosem używające jedynie tych dwóch operacji mają nie mniejszą siłę obliczeniową niż zdefiniowane przez nas bardziej ogólne automaty.

natomiast konfiguracją *końcową* nazwiemy dowolną konfigurację postaci (q, ϵ, γ) (tzn. kiedy całe słowo zostało już przeczytane). Dalej, określamy relację na konfiguracjach

$$(q, w, \gamma) \vdash_A (q', w', \gamma')$$

odzwierciedlającą fakt, że konfiguracja (q', w', γ') może być osiągnięta z konfiguracji (q, w, γ) w jednym kroku przez wykonanie jakiegoś przejścia automatu A.

Mianowicie, relacja

$$(q, aw, Z\beta) \vdash_A (q', w, \alpha\beta)$$

zachodzi, o ile

$$q, a, Z \to_A q', \alpha$$

jest przejściem automatu A. Zauważmy, że trójka (q, w, ϵ) (pusty stos) jest dobrze określoną konfiguracją, z której jednak nie ma przejścia do żadnej konfiguracji.

Jak zwykle, $\vdash_A^*$ oznacza zwrotno-przechodnie domknięcie relacji $\vdash_A$.

Niech teraz $w \in \Sigma^*$. Ciąg konfiguracji (q_0, w_0, γ_0), (q_1, w_1, γ_1), $\ldots$, (q_m, w_m, γ_m), gdzie (q_0, w_0, γ_0) jest konfiguracją początkową z $w_0 = w$ oraz, dla $i < m$, $(q_i, w_i, \gamma_i) \vdash_A (q_{i+1}, w_{i+1}, \gamma_{i+1})$, nazywamy *obliczeniem* automatu A na słowie w. Obliczenie nazwiemy *akceptującym* jeśli (q_m, w_m, γ_m) jest konfiguracją końcową (tj. $w_m = \epsilon$), a ponadto $q_m \in F$. Język rozpoznawany przez automat ze stosem A określamy jako zbiór tych słów, dla których istnieje obliczenie akceptujące; tak więc

$$L(A) = \{w \in \Sigma^* : (q_I, w, Z_I) \vdash_A^* (q_f, \epsilon, \gamma) \text{ dla pewnych } q_f \in F, \gamma \in \Gamma^*\}$$

1.2 Automaty akceptujące przez opróżnienie stosu

Dla automatu ze stosem A, określamy język $Z(A)$ obejmujący te i tylko te słowa w, dla których istnieje obliczenie zakończone całkowitym opróżnieniem stosu,

$$Z(A) = \{w \in \Sigma^* : (q_I, w, Z_I) \vdash_A^* (q, \epsilon, \epsilon) \text{ dla pewnego } q \in Q\}$$

W ten sposób przyporządkowujemy automatowi język na ogół różny od $L(A)$, przy czym stany akceptujące nie odgrywają tutaj żadnej roli. Okazuje się jednak, że nowy sposób akceptacji jest w pewnym sensie równoważny poprzedniemu.

Fakt 1 *1. Dla każdego automatu ze stosem A, istnieje automat ze stosem A', taki że $L(A) = Z(A')$.*

2. Dla każdego automatu ze stosem B, istnieje automat ze stosem B', taki że $Z(B) = L(B')$.

Dowód. Ad (1). Niech $A = (\Sigma, \Gamma, Q, q_I, Z_I, \delta, F)$. Określamy automat

$$A' = (\Sigma, \Gamma \cup \{Z_I'\}, Q \cup \{q_I', q_e\}, q_I', Z_I', \delta', \emptyset)$$

gdzie $\delta' \supseteq \delta$ jest rozszerzeniem δ o następujące przejścia

$$\begin{array}{rcll} q_I', \epsilon, Z_I' & \to & q_I, Z_I Z_I' & \\ q_f, \epsilon, Z & \to & q_e, Z & \text{dla } q_f \in F,\ Z \in \Gamma \cup \{Z_I'\} \\ q_e, \epsilon, Z & \to & q_e, \epsilon & \text{dla } Z \in \Gamma \cup \{Z_I'\} \end{array}$$

A zatem, automat A' rozpoczyna działanie od położenia "starego" symbolu startowego Z_I na "nowy" symbol Z'_I. Następnie automat A' symuluje działanie automatu A, z tym, że kiedy A wchodzi w stan akceptujący, A' może niedeterministycznie przyjąć opcję (całkowitego) opróżniania stosu. Zanim to nastąpi, nowy symbol startowy pozostaje cały czas na dnie stosu, żeby uniknąć przypadkowej akceptcji przez A' w sytuacji kiedy A opróżnia stos *bez* wejścia w stan akceptujący.

Szczegóły dowodu, że $L(A) = L(A')$ pozostawiamy Czytelnikowi.

Ad (2). Niech $B = (\Sigma, \Gamma, Q, q_I, Z_I, \delta, \emptyset)$. Określamy automat

$$B' = (\Sigma, \Gamma \cup \{Z'_I\}, Q \cup \{q'_I, q_f\}, q'_I, Z'_I, \delta', \{q_f\})$$

gdzie $\delta' \supseteq \delta$ jest rozszerzeniem δ o następujące przejścia

$$\begin{array}{rcll} q'_I, \epsilon, Z'_I & \to & q_I, Z_I Z'_I & \\ q, \epsilon, Z'_I & \to & q_f, \epsilon & \text{dla } q \in Q \end{array}$$

Intuicyjnie, automat B' symuluje działanie automatu B, z tym że na spodzie stosu pozostaje cały czas nowy symbol startowy Z'_I, który poza tym nie jest używany. Jeśli w pewnej chwili obliczenia symbol ten znajdzie się na wierzchołku stosu, oznacza to, że automat B, w odnośnej chwili symulowanego obliczenia opróżniłby swój stos. Dlatego automat B' wchodzi wówczas w stan akceptujący. Pamiętajmy jednak, że do tego, by obliczenie było akceptujące nie wystarczy samo pojawienie się stanu akceptującego, potrzeba jeszcze, by konfiguracja była końcowa (tzn. by całe słowo zostało przeczytane). □

Ćwiczenia

1. Skonstruować automaty ze stosem rozpoznające poznane wcześniej języki bezkontekstowe: zbiór palindromów, zbiór poprawnie uformowanych ciągów nawiasów, zbiór słów, które mają dwa razy więcej b niż a, zbiór ciągów, które nie są postaci ww.

2. Dla liczby naturalnej n, niech $\text{bin}(n) \in \{0,1\}^*$ będzie binarnym przedstawieniem liczby n. Skonstruować automat ze stosem rozpoznający język

$$\{\text{bin}(n)\$\text{bin}(n+1)^R \,:\, n \in N\}$$

3. Dowieść, że dla każdego automatu ze stosem A, można skonstruować automat ze stosem *o dwóch stanach* A', taki że $L(A) = L(A')$.

4. Dowieść, że automatowi A' z poprzedniego zadania można postawić dalszy wymóg, że każde przejście jest postaci

$$q, a, Z \to_{A'} q', \alpha$$

gdzie $|\alpha| \leq 2$ (q, q' dowolne).

5. Dowieść, że dla każdego automatu ze stosem A, można skonstruować równoważny mu automat ze stosem A'', w którym każde przejście jest postaci

$$q, a, Z \rightarrow_{A''} q', YZ$$

lub

$$q, a, Z \rightarrow_{A''} q', \epsilon$$

(*) Czy dla tego automatu można nadal ograniczyć liczbę stanów?

6. Mając dany automat ze stosem akceptujący język L, skonstruować automaty ze stosem akceptujące następujące języki:

- $\text{Prefix}(L) = \{w : (\exists v) wv \in L\}$
- $\text{Suffix}(L) = \{w : (\exists u) uw \in L\}$
- $\text{Subword}(L) = \{w : (\exists u, v) uwv \in L\}$
- (*) $L^R = \{w^R : w \in L\}$

7. Mając dany automat ze stosem akceptujący język L i automat skończony akceptujący język R, skonstruować automaty ze stosem akceptujące następujące języki:

- LR^{-1}
- $R^{-1}L$
- $L \cap R$

8. Dla danych językow regularnych L i M, skonstruować automat ze stosem rozpoznający język $\bigcup_{i \in N}(L^i \cap M^i)$. Podać przykład, że zbiór ten nie musi być regularny.

9. (*) Dowieść, że dla każdego automatu ze stosem A istnieje stała C (zależna od automatu), taka, że dla każdego słowa $w \in Z(A)$, istnieje obliczenie akceptujące (przez pusty stos) o długości $\leq C|w|$. Wskazówka: oszacować wysokość stosu w obliczeniu akceptującym.

10. (*) Niech A będzie automatem ze stosem. Dowieść, że zbiór słów, które są możliwymi zawartościami stosu automatu A, jest językiem regularnym. Formalnie, mamy na myśli zbiór

$$\{\alpha \in \Gamma^* : (\exists w, v \in \Sigma^*)(\exists q \in Q)\, q_I, w, Z_I \vdash_A q, v, \alpha\}$$

Wywnioskować stąd, że zbiór słów, które są możliwymi zawartościami stosu automatu A w jakimś obliczeniu *akceptującym*, jest językiem bezkontekstowym.

11. Automat ze stosem $A = (\Sigma, \Gamma, Q, q_I, Z_I, \delta, F)$ nazywamy *deterministycznym*, jeśli w każdej sytuacji możliwy jest co najwyżej jeden ruch. Dokładniej:

- jeśli, dla pewnej pary q, Z, zachodzi $q, \epsilon, Z \rightarrow_A p, \alpha$ przy pewnych p, α, to dla żadnego $\sigma \in \Sigma$, nie zachodzi $q, \sigma, Z \rightarrow_A p', \alpha'$, dla żadnych p', α';

- dla każdych q, σ, Z, istnieje co najwyżej jedna para p, α, taka że $q, \sigma, Z \rightarrow_A p, \alpha$.

Niech L będzie zbiorem palindromów nad alfabetem $\{a, b\}$. Dowieść, że jeśli $L = Z(A)$, to automat A jest niedeterministyczny. (Uwaga: analogiczny fakt można dowieść, gdy $L = L(A)$, ale jest to znacznie trudniejsze.)

12. (**) Niech
$$M = \{a^n b^n \ : \ n \in N\} \cup \{a^n b^{2n} \ : \ n \in N\}$$
Nietrudno jest podać niedeterministyczny automat ze stosem rozpoznający ten język. Wykazać, że *nie* istnieje *deterministyczny* automat ze stosem A, taki, że $M = L(A)$.

2 Automaty ze stosem jako modele rozpoznawania języków bezkontekstowych

W tym rozdziale wykażemy ścisłą odpowiedniość pomiędzy automatami ze stosem a gramatykami bezkontekstowymi : automaty rozpoznają dokładnie te języki, które gramatyki generują. Zanim pokażemy właściwą konstrukcję, która automatowi przyporządkowuje równoważną gramatykę i na odwrót, wykażemy pewną nieco zaskakującą a bardzo przydatną własność automatów ze stosem.

2.1 Redukcja stanów w automacie ze stosem

Udowodnimy, że, w automacie ze stosem, symbole stosowe mogą w pewnym sensie całkowicie przejąć rolę stanów.

Twierdzenie 1 *Dla każdego automatu ze stosem A istnieje automat A'* z jednym stanem, *taki że $Z(A) = Z(A')$.*

Dowód. Niech $A = (\Sigma, \Gamma, Q, q_I, Z_I, \delta, F)$. Określimy automat

$$A' = (\Sigma, \Gamma', \{e\}, e, Z'_I, \delta', \emptyset)$$

Nowym alfabetem symboli stosowych jest

$$\Gamma' = \{[q, Z, q'] \ : \ q, q' \in Q, \ Z \in \Gamma\} \cup \{Z'_I\}$$

Zbiór przejść δ' określony jest następująco:

- dla dowolnego $q \in Q$,
$$e, \epsilon, Z'_I \ \rightarrow_{A'} \ e, [q_I, Z_I, q]$$
jest przejściem automatu A';

- o ile $q, a, Z \rightarrow_A p, Z_1 Z_2 \ldots Z_m$, $m \geq 1$, jest przejściem automatu A, a $p_1, p_2, \ldots, p_{m-1}, q' \in Q$ są dowolne, to
$$e, a, [q, Z, q'] \ \rightarrow_{A'} \ e, [p, Z_1, p_1][p_1, Z_2, p_2] \ldots [p_{m-2}, Z_{m-1}, p_{m-1}][p_{m-1}, Z_m, q']$$
jest przejściem automatu A';

- o ile $q, a, Z \to_A q', \epsilon$ jest przejściem automatu A, to

$$e, a, [q, Z, q'] \to_{A'} e, \epsilon$$

jest przejściem automatu A'.

Wykażemy, że dla dowolnego $w = uv$, następujące warunki są równoważne:

Warunek 1

$$q_I, w, Z_I \vdash_A^* q, v, Z_1 \dots Z_m$$

Warunek 2 Dla dowolnych $p_1, \dots, p_m \in Q$,

$$e, w, Z_I' \vdash_{A'}^* e, v, [q, Z_1, p_1][p_1, Z_2, p_2] \dots [p_{m-2}, Z_{m-1}, p_{m-1}][p_{m-1}, Z_m, p_m]$$

Zauważmy od razu, że dla $v = \epsilon$ i $m = 0$, z równoważności Warunków 1 i 2 otrzymamy, że

$$q_I, w, Z_I \vdash_A^* q, \epsilon, \epsilon \iff e, w, Z_I' \vdash_{A'}^* e, \epsilon, \epsilon$$

a zatem

$$w \in Z(A) \iff w \in Z(A')$$

co zakończy dowód.

Pozostaje więc dowieść (1)$\Leftrightarrow$ (2)

(1)$\Rightarrow$ (2) Przez indukcję ze względu na długość obliczenia automatu A prowadzącego od konfiguracji (q_I, w, Z_I) do $(q, v, Z_1 \dots Z_m)$, wykażemy że

$$e, w, Z_I' \vdash_{A'}^* e, v, [q, Z_1, p_1][p_1, Z_2, p_2] \dots [p_{m-2}, Z_{m-1}, p_{m-1}][p_{m-1}, Z_m, p_m]$$

przy dowolnych $p_1, \dots, p_m$.

Dla obliczenia o długości 0

$$q_I, w, Z_I \vdash_A^* q_I, w, Z_I$$

mamy, dla dowolnego $p \in Q$, obliczenie automatu A' o długości 1, postaci

$$e, w, Z_I' \vdash_{A'} e, w, [q_I, Z_I, p]$$

Z kolei rozważmy obliczenie automatu A o długości > 0. Mamy zatem

$$\begin{aligned} q_I, w, Z_I &\vdash_A^* q', av, Y_1 Y_2 \dots Y_m \\ &\vdash_A q, v, Z_1 \dots Z_k Y_2 \dots Y_m \end{aligned}$$

dla pewnych $a \in \Sigma \cup \{\epsilon\}$ oraz $Y_1, \dots, Y_m$, $Z_1, \dots, Z_k$, gdzie

$$q', a, Y_1 \to_A q, Z_1 \dots Z_k$$

jest przejściem automatu A.

Niech $q_1, \ldots, q_k, p_2, \ldots, p_m \in Q$, dowolne. Z założenia indukcyjnego, dla dowolnego p_1, mamy

$$(*)\ e, w, Z_I' \vdash_{A'}^* e, av, [q', Y_1, p_1][p_1, Y_2, p_2] \ldots [p_{m-2}, Y_{m-1}, p_{m-1}][p_{m-1}, Y_m, p_m]$$

Rozważymy teraz dwa przypadki, w zależności od tego czy $k \neq 0$.

1. Gdy $k > 0$, mamy, z definicji A', przejście

$$e, a, [q', Y_1, q_k] \ \rightarrow_{A'}\ e, [q, Z_1, q_1][q_1, Z_2, q_2] \ldots [q_{k-1}, Z_k, q_k]$$

Następnie, kładąc w powyższej zależności $(*)$, $p_1 = q_k$, mamy

$$e, w, Z_I' \vdash_{A'}^* e, av, [q', Y_1, q_k][q_k, Y_2, p_2] \ldots [p_{m-2}, Y_{m-1}, p_{m-1}][p_{m-1}, Y_m, p_m]$$

Stąd,

$$\begin{array}{rll} e, w, Z_I' & \vdash_{A'}^* & e, av, [q', Y_1, q_k][q_k, Y_2, p_2] \ldots [p_{m-2}, Y_{m-1}, p_{m-1}][p_{m-1}, Y_m, p_m] \\ & \vdash_{A'} & e, v, [q, Z_1, q_1][q_1, Z_2, q_2] \ldots [q_{k-1}, Z_k, q_k][q_k, Y_2, p_2] \ldots [p_{m-2}, Y_{m-1}, p_{m-1}][p_{m-1}, Y_m, p_m] \end{array}$$

2. Gdy $k = 0$, mamy, z definicji A',

$$e, a, [q', Y_1, q] \ \rightarrow_{A'}\ e, \epsilon$$

Kładąc w zależności $(*)$, $p_1 = q$, mamy

$$e, w, Z_I' \vdash_{A'}^* e, av, [q', Y_1, q][q, Y_2, p_2] \ldots [p_{m-2}, Y_{m-1}, p_{m-1}][p_{m-1}, Y_m, p_m]$$

Stąd

$$\begin{array}{rll} e, w, Z_I' & \vdash_{A'}^* & e, av, [q', Y_1, q][q, Y_2, p_2] \ldots [p_{m-2}, Y_{m-1}, p_{m-1}][p_{m-1}, Y_m, p_m] \\ & \vdash_{A'} & e, v, [q, Y_2, p_2] \ldots [p_{m-2}, Y_{m-1}, p_{m-1}][p_{m-1}, Y_m, p_m] \end{array}$$

co kończy dowód implikacji (1)$\Rightarrow$ (2).

(2)$\Rightarrow$ (1) Wykażemy implikację silniejszą, a mianowicie, że z faktu iż

$$e, w, Z_I' \vdash_{A'}^* e, v, [q, Z_1, p_1][p_1, Z_2, p_2] \ldots [p_{m-2}, Z_{m-1}, p_{m-1}][p_{m-1}, Z_m, p_m]$$

dla *pewnych* $p_1, \ldots, p_m$, wynika

$$q_I, w, Z_I \vdash_A^* q, v, Z_1 \ldots Z_m$$

Podobnie jak poprzednio użyjemy indukcji ze względu na długość obliczenia, ale tym razem chodzić będzie o obliczenie automatu A' prowadzące od konfiguracji e, w, Z_I' do $e, v, [q, Z_1, p_1][p_1, Z_2, p_2] \ldots [p_{m-2}, Z_{m-1}, p_{m-1}][p_{m-1}, Z_m, p_m]$. Zgodnie z definicją automatu A', najkrótsze takie obliczenie ma oczywiście długość 1 i jest postaci

$$e, w, Z_I' \ \vdash_{A'}\ e, w, [q_I, Z_I, q]$$

Odpowiednie obliczenie automatu A jest obliczeniem trywialnym

$$q_I, w, Z_I \vdash_A^* q_I, w, Z_I$$

Z kolei rozważmy możliwe obliczenie postaci

$$\begin{aligned} e, w, Z_I' &\vdash_{A'}^* e, av, [q', Y_1, p_1][p_1, Y_2, p_2] \dots [p_{m-2}, Y_{m-1}, p_{m-1}][p_{m-1}, Y_m, p_m] \\ &\vdash_{A'} e, v, [q, Z_1, q_1][q_1, Z_2, q_2] \dots [q_{k-1}, Z_k, p_1][p_1, Y_2, p_2] \dots [p_{m-2}, Y_{m-1}, p_{m-1}][p_{m-1}, Y_m, p_m] \end{aligned}$$

Ostatni krok tego obliczenia wykorzystuje przejście automatu A',

$$e, a, [q', Y_1, p_1] \rightarrow_{A'} e, [q, Z_1, q_1][q_1, Z_2, q_2] \dots [q_{k-1}, Z_k, p_1]$$

gdzie

$$q', a, Y_1 \rightarrow_A q, Z_1 \dots Z_k$$

jest przejściem automatu A. (Poniższy argument działa zarówno dla $k > 0$ jak i dla $k = 0$, tzn. gdy ciąg $Z_1 \dots Z_k$ jest pusty.)

Z założenia indukcyjnego, mamy

$$q_I, w, Z_I \vdash_A^* q', av, Y_1 \dots Y_m$$

Stąd

$$\begin{aligned} q_I, w, Z_I &\vdash_A^* q', av, Y_1 \dots Y_m \\ &\vdash_A q, v, Z_1 \dots Z_k Y_2 \dots Y_m \end{aligned}$$

Ta uwaga kończy dowód twierdzenia. □

2.2 Równoważność gramatyk bezkontekstowych i automatów ze stosem

Twierdzenie 2 *Dla każdego automatu ze stosem A, można skonstruować gramatykę bezkontekstową G, taką że $L(A) = L(G)$.*

Dowód. Niech $L = L(A)$. Na podstawie Faktu 1 i Twierdzenia 2.1, możemy znaleźć automat z jednym stanem, A', taki że $L = Z(A')$, powiedzmy

$$A' = (\Sigma, \Gamma, \{e\}, e, Z_I, \delta, \emptyset)$$

Określamy gramatykę G w ten sposób, że

$$G = (\Sigma, \Gamma, Z_I, R)$$

gdzie zbiór reguł R jest zdefiniowany następująco:

$$Z \xrightarrow{G} aY_1 \dots Y_m \Leftrightarrow e, a, Z \rightarrow_{A'} e, Y_1 \dots Y_m$$

gdzie $Z, Y_1, \dots, Y_m \in \Gamma$, $a \in \Sigma \cup \{\epsilon\}$.

Pozostaje dowieść

$$Z(A') = L(G)$$

"$\subseteq$" Udowodnimy następujący fakt.

(*) Przypuśćmy, że $w = uv$ i $e, w, Z_I \vdash^*_{A'} e, v, \gamma$. Wówczas $Z_I \stackrel{G*}{\to} u\gamma$.

Dowód przeprowadzimy przez indukcję ze względu długość obliczenia częściowego prowadzącego od konfiguracji (e, w, Z_I) do (e, v, γ). Jeśli to jest obliczenie długości 0, to teza jest oczywista. Jeśli obliczenie jest dłuższe niż 0, to mamy

$$\begin{array}{rl} e, w, Z_I & \vdash^*_{A'} \quad e, av, Y_1 \dots Y_m \\ & \vdash_A \quad e, v, Z_1 \dots Z_k Y_2 \dots Y_m \end{array}$$

gdzie $a \in \Sigma \cup \{\epsilon\}$, $u = u'a$, dla pewnego u', $w = u'av$ i $e, a, Y_1 \to_{A'} e, Z_1 \dots Z_k$ jest przejściem automatu A'. Wówczas $Y_1 \stackrel{G}{\to} aZ_1 \dots Z_k$ jest regułą gramatyki G. Korzystając z założenia indukcyjnego mamy więc

$$Z_I \stackrel{G*}{\to} u'Y_1 \dots Y_m \stackrel{G}{\to} u'aZ_1 \dots Z_k Y_2 \dots Y_m$$

co kończy dowód (*). Biorąc pod uwagę przypadek gdy $v = \gamma = \epsilon$, otrzymujemy, że $e, w, Z_I \vdash^*_{A'} e, \epsilon, \epsilon$ implikuje $Z_I \stackrel{G*}{\to} w$.

"$\supseteq$" Udowodnimy następujący fakt.

(**) Przypuśćmy, że $w = uv \in \Sigma^*$ i $Z_I \stackrel{l-G*}{\to} u\gamma$, $\gamma \in \Gamma^*$. Wówczas $e, w, Z_I \vdash^*_{A'} e, v, \gamma$.

Dowód przeprowadzimy przez indukcję ze względu na długość lewostronnego wyprowadzenia słowa $u\gamma$ ze zmiennej Z_I. Kiedy wyprowadzenie ma długości 0, to $u = \epsilon$, $\gamma = Z_I$ i teza jest oczywista. Kiedy wyprowadzenie jest dłuższa niż 0, to mamy

$$\begin{array}{rl} Z_I & \stackrel{l-G*}{\to} \quad u'Y_1 \dots Y_m \\ & \stackrel{l-G}{\to} \quad u'aZ_1 \dots Z_k Y_2 \dots Y_m \end{array}$$

gdzie, jak poprzednio, $a \in \Sigma \cup \{\epsilon\}$, $u = u'a$, $w = u'av$ i $Y_1 \stackrel{G}{\to} aZ_1 \dots Z_k$ jest regułą gramatyki G, a zatem, zgodnie z definicją G, $e, a, Y_1 \to_{A'} e, Z_1 \dots Z_k$ jest przejściem automatu A'. Korzystając z założenia indukcyjnego mamy

$$\begin{array}{rl} e, w, Z_I & \vdash^*_{A'} \quad e, av, Y_1 \dots Y_m \\ & \vdash_{A'} \quad e, v, Z_1 \dots Z_k Y_2 \dots Y_m \end{array}$$

Przypuśćmy teraz, że $Z_I \stackrel{G*}{\to} w$. Na podstawie Twierdzenia 1 z Odcinka 3, istnieje wyprowadzenie *lewostronne* w z Z_I. Z (**) wynika, że wówczas $e, w, Z_I \vdash^*_{A'} e, \epsilon, \epsilon$, czyli $w \in Z(A')$.

Ta uwaga kończy dowód twierdzenia. □

Twierdzenie 3 *Dla każdej gramatyki bezkontekstowej G, można skonstruować automat ze stosem A, taki że $L(G) = L(A)$.*

Dowód. Niech G będzie gramatyką bezkontekstową. Jeśli $L(G) = \emptyset$, to zadanie jest trywialne, możemy więc założyć, że $L(G) \neq \emptyset$. Na podstawie Faktu 3 i Twierdzenia 2 z Odcinka 3, możemy skonstruować gramatykę w postaci normalnej Chomsky'ego, generującą język $L(G) - \{\epsilon\}$. Zbudujemy automat A', taki że $Z(A') = L(G')$. Na podstawie

Faktu 1, można dalej znaleźć automat, powiedzmy A'', taki że $L(A'') = L(G')$. Modyfikacja tego automatu w taki sposób by akceptował również słowo puste, o ile należy ono do $L(G)$, jest łatwą konstrukcją, którą pozostawiamy Czytelnikowi.

Niech

$$G' = (\Sigma, V, X_I, R)$$

Określamy automat

$$A' = (\Sigma, V, \{e\}, e, X_I, \delta, \emptyset)$$

gdzie relacja przejść δ jest określona następująco:

- dla każdej reguły postaci $X \stackrel{G}{\to} YZ$,

$$e, \epsilon, X \to_{A'} e, YZ$$

- dla każdej reguły postaci $X \stackrel{G}{\to} \sigma$, $\sigma \in \Sigma$,

$$e, \sigma, X \to_{A'} e, \epsilon$$

Pozostaje dowieść

$$Z(A') = L(G')$$

Dowód tej równości opuszczamy, ponieważ jest analogiczny do dowodu podobnej równości w dowodzie Twierdzenia 2. Można powiedzieć więcej: jeżeli do określonego przed chwilą automatu zastosujemy konstrukcję z tamtego dowodu, to otrzymana gramatyka okaże się dokładnie (!) gramatyką G'. A zatem powyższa równość została już *de facto* udowodniona w dowodzie Twierdzenia 2. □

Wniosek 1 *Następujące warunki są równoważne, dla języka $L \subseteq \Sigma^*$.*

1. *L jest generowany przez gramatykę bezkontekstową,*
2. *L jest akceptowany przez niedeterministyczny automat ze stosem.*

Języki generowane przez gramatyki bezkontekstowe nazywamy *językami bezkontekstowymi* (ang. *context-free languages*). Gramatyki bezkontekstowe są metodą *syntezy* języków bezkontekstowych. Poznaliśmy już także narzędzie *analizy* tych języków: niedeterministyczny automat ze stosem. Udowodniliśmy, że obie metody: syntezy i analizy, dokładnie sobie odpowiadają, tzn. automaty ze stosem rozpoznają dokładnie te języki, które gramatyki syntezują.

Klasa języków bezkontekstowych stanowi rozszerzenie klasy języków regularnych i obejmuje wiele naturalnych przykładów języków nie będących regularnymi. Wiele elementów języków programowania, jak np. wyrażenia arytmetyczne, struktura bloków itp., da się opisać językami bezkontekstowymi. Stąd, ogromne znaczenie tych języków w konstrukcji kompilatorów.

3 Lematy o pompowaniu

W tym rozdziale poznamy dwa *lematy o pompowaniu* i ich zastosowanie do dowodzenia, że jakiś język nie jest bezkontekstowy.

Lemat 1 (o pompowaniu) *Niech $L \subseteq \Sigma^*$ będzie językiem bezkontekstowym. Wówczas istnieje stała M zależna tylko od L, taka, że dla każdego słowa α, jeśli $\alpha \in L$ i $|\alpha| \geq M$, to α można przedstawić $\alpha = \alpha_1\gamma_1\beta\gamma_2\alpha_2$ tak, że spełnione są następujące warunki:*

- $\gamma_1\gamma_2 \neq \epsilon$,
- $|\gamma_1\beta\gamma_2| \leq M$,
- *dla każdego* $i \geq 0$, $\alpha_1\gamma_1^i\beta\gamma_2^i\alpha_2 \in L$.

Dowód. Niech G będzie gramatyką bezkontekstową w postaci Chomsky'ego generującą język $L - \{\epsilon\}$, $G = (\Sigma, V, X_I, R)$. Niech $|V| = k$, kładziemy

$$M = 2^k$$

Niech D będzie drzewem wyprowadzenia słowa α o długości $|\alpha| \geq M$. Wówczas głębokość D jest $\geq k+1$. Istotnie, nietrudno wykazać przez indukcję, że maksymalne słowo, jakie można wygenerować przy pomocy drzewa o głębokości i, ma długość 2^{i-1}. Niech $p_0, p_1, p_2, \ldots, p_\ell$ będzie pewną ścieżką o maksymalnej długości w drzewie D. Mamy oczywiście $\ell \geq k+1$, przy czym $D(p_\ell) \in \Sigma$, natomiast, dla $m < \ell$, $D(m) \in V$. Muszą zatem istnieć dwa wierzchołki na tej ścieżce, w których pojawia się ta sama zmienna, powiedzmy $D(p_i) = D(p_j) = X$, $i < j$. Wybierzmy "pierwszą od końca" parę o tej własności, tzn. załóżmy, że $(\forall m, n > i) m \neq n \Rightarrow D(p_m) \neq D(p_n)$. Oczywiście, podciąg $p_i, p_{i+1}, \ldots, p_{\ell-1}$ ma wówczas nie więcej niż $k+1$ elementów. Rozważmy *poddrzewo* drzewa D wyznaczone przez wierzchołek p_i, które nazwiemy D', formalnie (odc. 3, str. 3)

$$\begin{aligned} \mathrm{dom}(D') &= \{u : p_i u \in \mathrm{dom}(D)\} \\ D'(u) &= D(p_i u)\,, \text{ dla } u \in \mathrm{dom}(D') \end{aligned}$$

Nietrudno sprawdzić, że D' jest również drzewem wyprowadzenia, lecz tym razem ze zmiennej $X = D(p_i)$. Zauważmy, że głębokość tego drzewa jest $\leq k+1$, co wynika z maksymalności ścieżki $p_1, p_2, \ldots, p_\ell$ i uczynionej wyżej uwagi o mocy podciągu $p_i, p_{i+1}, \ldots, p_{\ell-1}$. Niech γ będzie plonem drzewa D', $\gamma = y(D')$. Na mocy zauważonej wcześniej zależności pomiędzy głębokością drzewa wyprowadzenia a długością generowanego słowa,

$$|\gamma| \leq 2^k = M$$

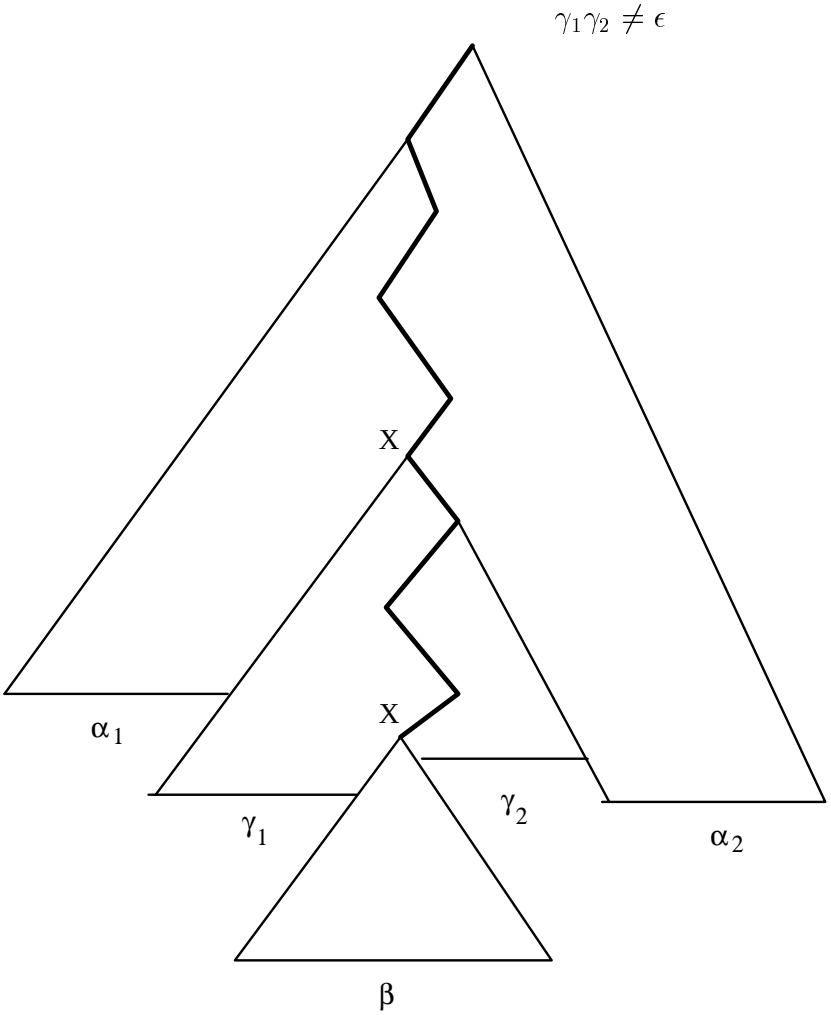
Z kolei niech D'' będzie poddrzewem D wyznaczonym przez wierzchołek p_j, analogicznie do D'. Zauważmy, że jest to również drzewo wyprowadzenia ze zmiennej X. Niech $\beta = y(D'')$.

Mamy więc

$$\gamma = \gamma_1\beta\gamma_2$$

dla pewnych γ_1, γ_2.

Twierdzimy, że



Istotnie, zgodnie z definicją gramatyki Chomsky'ego, wierzchołek p_i ma dwa następniki w drzewie D, p_i1 i p_i2. Jednym z nich jest p_{i+1}, a drugi nie leży na wybranej przez nas ścieżce. Przypuśćmy, że $p_{i+1} = p_i2$. Niech D_1 i D_2 będą poddrzewami drzewa D wyznaczonymi przez wierzchołki p_i1 i p_i2 odpowiednio. Nietrudno zauważyć, że $y(D_1)$ jest prefiksem słowa γ_1. Ponieważ, z definicji postaci gramatyki Chomsky'ego, $y(D_1) \neq \epsilon$, otrzymujemy $\gamma_1 \neq \epsilon$. W przypadku, gdy wierzchołkiem leżącym na ścieżce jest p_i1, argument przebiega podobnie.

Dla zakończenia dowodu pozostaje jeszcze wykazać, że spełniony jest ostatni warunek lematu o pompowaniu. Niech $v \in \{1,2\}^*$ będzie tym słowem, że $p_j = p_iv$. (Intuicyjnie, v wyznacza ścieżkę z wierzchołka p_i do wierzchołka p_j.) Określimy ciąg drzew wyprowadzenia $E_0, E_1, \ldots$ i pomocniczo ciąg słów $u_2, u_3, \ldots \in \{1,2\}^*$, następująco:

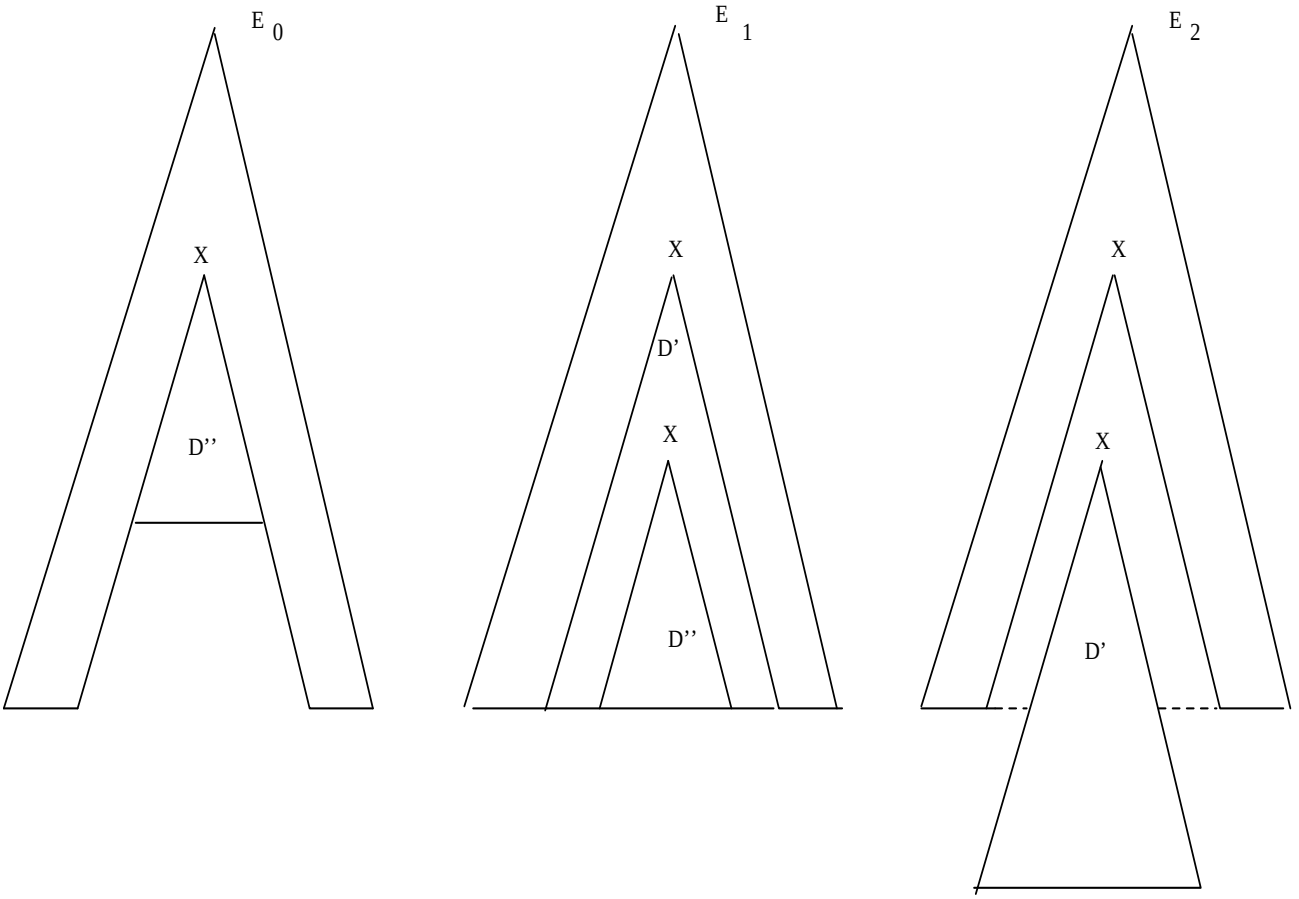
- E_0 jest rezultatem podstawienia w drzewie D drzewa D'' na wierzchołek p_i, w notacji symbolicznej (por. Odc. 3, str. 4), $E_0 = D[p_i \leftarrow D'']$.
- $E_1 = D$.
- E_2 jest rezultatem podstawienia w
  drzewie D drzewa D' na wierzchołek p_j, tj. $E_2 = D[p_j \leftarrow D']$, i $u_2 = p_jv$.

- E_3 jest rezultatem podstawienia w drzewie E_2 drzewa D' na wierzchołek u_2, tj. $E_3 = E_2[u_2 \leftarrow D']$, i $u_3 = u_2 v$.
- Ogólniej, dla $n \geq 2$, E_{n+1} jest rezultatem podstawienia w drzewie E_n drzewa D' na wierzchołek u_n, tj. $E_{n+1} = E_n[u_n \leftarrow D']$, i $u_{n+1} = u_n v$.

Niech α_1, α_2 będą tymi słowami, że $\gamma = \alpha_1 \beta \alpha_2$. Opierając się wprost na powyższych definicjach, nietrudno wykazać, że

$$\begin{array}{rcc} y(E_0) & = & \alpha_1\beta\alpha_2 \\ y(E_1) & = & \alpha_1\gamma_1\beta\gamma_2\alpha_2 \\ y(E_2) & = & \alpha_1\gamma_1\gamma_1\beta\gamma_2\gamma_2\alpha_2 \\ y(E_3) & = & \alpha_1\gamma_1\gamma_1\gamma_1\beta\gamma_2\gamma_2\gamma_2\alpha_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ y(E_n) & = & \alpha_1\gamma_1^n\beta\gamma_2^n\alpha_2 \end{array}$$

□



Przyk"lad 1 Zbiór $\{a^n b^n a^n : n \in N\}$ nie jest bezkontekstowy. Istotnie, niech M będzie stałą z lematu i niech $n > M$. Przypuśćmy, że $a^n b^n a^n = \alpha_1\gamma_1\beta\gamma_2\alpha_2$ jest dekompozycją z lematu. Nietrudno zauważyć, że γ_1, $\gamma_2 \in \{a\}^* \cup \{b\}^*$. Analizując poszczególne przypadki, łatwo dochodzimy do sprzeczności. Na przykład, gdy $\gamma_1 \in \{a\}^*$ i $\gamma_2 \in \{b\}^*$, to również słowo $a^{n+|\gamma_1|}b^{n+|\gamma_2|}a^n$ powinno należeć do języka, wbrew definicji.

Jeśli $w \in \Sigma^*$ i $|w| = m$, to elementy zbioru $\{1, \ldots, m\}$ będziemy nazywali *pozycjami* w słowie w. W kolejnym lemacie będziemy rozważali słowa z wyróżnionymi pozycjami, tj., formalnie, pary (w, P), gdzie $P \subseteq \{1, \ldots, |w|\}$.

Lemat 2 (lemat Ogdena) *Niech $L \subseteq \Sigma^*$ będzie językiem bezkontekstowym. Wówczas istnieje stała M zależna tylko od L, taka, że dla każdego słowa $\alpha \in L$ z dowolnie wyróżnionymi co najmniej M pozycjami, α można przedstawić $\alpha = \alpha_1\gamma_1\beta\gamma_2\alpha_2$ tak, że spełnione są następujące warunki:*

- *γ_1 i γ_2 zawierają wspólnie co najmniej jedną wyróżnioną pozycję,*
- *słowo $\gamma_1\beta\gamma_2$ zawiera nie więcej niż M wyróżnionych pozycji,*
- *dla każdego $i \geq 0$, $\alpha_1\gamma_1^i\beta\gamma_2^i\alpha_2 \in L$.*

Dowód (szkic). Argument jest podobny jak w dowodzie lematu o pompowaniu. Niech $G = (\Sigma, V, X_I, R)$ będzie gramatyką bezkontekstową w postaci Chomsky'ego generującą język $L - \{\epsilon\}$ i niech $|V| = k$. Kładziemy

$$M = 2^{k+1}$$

Przypuśćmy, że D jest drzewem wyprowadzenia słowa α, w którym wyróżnione jest $\geq M$ pozycji (oczywiście wówczas także $|\alpha| \geq M$). Strategia wyboru ścieżki $p_0, p_1, \ldots, p_\ell$ jest następująca. Oczywiście, $p_0 = \epsilon$. Z kolei przypuśćmy, że już wybraliśmy do naszej ścieżki wierzchołki $p_0, p_1, \ldots, p_m$, $0 \leq m < \ell$. Wierzchołek p_m ma w drzewie D dwa następniki: p_m1 i p_m2, które wyznaczają dwa poddrzewa drzewa D, powiedzmy, D_1 i D_2 odpowiednio. Wybieramy ten następnik, w którego poddrzewie znajduje się *więcej* wyróżnionych pozycji, a w przypadku remisu wybieramy, powiedzmy, p_m1. Nietrudno zauważyć, że tak określona ścieżka $p_0, p_1, \ldots, p_\ell$ prowadzi do liścia odpowiadającego jakiejś wyróżnionej pozycji w generowanym słowie α.

Każdy wierzchołek p_m na ścieżce o tej własności, że *oba* poddrzewa wyznaczone przez następniki p_m zawierają jakieś wyróżnione pozycje, nazwiemy *punktem rozgałęzienia.* Zauważmy, że jeżeli p_m jest punktem rozgałęzienia, to poddrzewo wyznaczone przez p_{m+1} zawiera istotnie *mniej* ale *co najmniej połowę* pozycji, jakie znajdowały się w drzewie wyznaczonym przez p_m. Pamiętając o tym, że w drzewie wyznaczonym przez p_0 (tj. drzewie D) jest $\geq 2^{k+1}$ wyróżnionych pozycji, nietrudno wykazać, że na ścieżce $p_0, p_1, \ldots, p_\ell$ musi leżeć co najmniej $k+1$ punktów rozgałęzienia. Wśród tych punktów możemy więc znaleźć dwa takie, powiedzmy p_i, p_j, że $i < j$ i $D(p_i) = D(p_j)$. Dalej dowód przebiega bardzo podobnie jak w przypadku lematu o pompowaniu. Mianowicie, wybieramy "pierwszą od końca" parę p_i, p_j o powyższej własności i słowa $\alpha_1, \gamma_1, \beta, \gamma_2, \alpha_2$ określamy analogicznie, jak w tamtym dowodzie.

Aby wykazać, że słowo $\alpha_1\beta\alpha_2$ zawiera nie więcej niż M wyróżnionych pozycji, wystarczy zauważyć, że p_i jest co najwyżej "$k+1$-szym od końca" punktem rozgałęzienia na ścieżce, oraz, że, ogólnie, poddrzewo wyznaczone przez "m-ty od końca" punkt rozgałęzienia na naszej ścieżce, zawiera co najwyżej 2^m pozycji. Fakt, że jedno ze słów γ_1, γ_2 zawiera co najmniej jedną wyróżnioną pozycję, wynika z tego, że p_i jest punktem rozgałęzienia. Ostatni warunek lematu jest otrzymany analogicznie, jak w przypadku dowodu lematu o pompowaniu. □

Przyk"lad 2 Język

$$L = \{a^i b^j c^k \ : \ i \neq j, \ j \neq k, \ i \neq k\}$$

nie jest bezkontekstowy. Istotnie, niech n będzie stałą z lematu Ogdena. Rozważmy słowo $\alpha = a^n b^{n+n!} c^{n+2\cdot n!}$, w którym są wyróżnione wszystkie pozycje a i tylko te. Przypuśćmy, że $\alpha = \alpha_1\gamma_1\beta\gamma_2\alpha_2$ jest dekompozycją z lematu. Wówczas przynajmniej jedno ze słów γ_1, γ_2 musi zawierać przynajmniej jedno a. Nietrudno widzieć, że musi zachodzić $\gamma_1 \in \{a\}\{a\}^*$ oraz $\gamma_2 \in \{a\}^* \cup \{b\}^* \cup \{c\}^*$. W każdym przypadku możemy łatwo dojść do sprzeczności. Przypuśćmy na przyład, że $\gamma_2 \in \{b\}^*$. Niech $p = |\gamma_1|$, $q = |\gamma_2|$. Mamy $1 \leq p \neq n$, niech więc $p_1 = n!/p$. Wówczas, z trzeciego punktu lematu Ogdena, również słowo

$$a^{n+p\cdot(2p_1)} b^{n+p\cdot(2\ p_1)} c^{n+2\cdot n!}$$

powinno należeć do L, ale $n + p \cdot (2p_1) = n + 2 \cdot n!$, co przeczy definicji L. □

4 Własności domknięcia

W tym punkcie rozważymy *własności domknięcia*, tzn. na jakie operacje jest, a na jakie nie jest zamknięta klasa języków bezkontekstowych. Dowody poniższych faktów pozostawiamy jako ćwiczenia.

Fakt 2 *Rodzina języków bezkontekstowych jest zamknięta na operacje skończonej sumy, konkatenacji i iteracji ("gwiazdki").*

Uwaga. Rodzina języków bezkontekstowych nie jest natomiast zamknięta na operacje przecięcia i uzupełnienia. Istotnie, niech

$$M = \{a^n b^n a^n \ : \ n \in N\}$$

będzie językiem, o którym wykazaliśmy, że nie jest bezkontekstowy (Przykład 1). Nietrudno pokazać, że

$$\begin{aligned} M &= \{a^n b^n \ : \ n \in N\}a^* \cap a^*\{b^n a^n \ : \ n \in N\} \\ M &= \{a,b\}^* - \{a^i b^j a^k \ : \ i \neq j \text{ lub } j \neq k\} \end{aligned}$$

gdzie języki występujące po prawych stronach równości *są* bezkontekstowe.

Fakt 3 *Rodzina języków bezkontekstowych jest zamknięta na przecięcia z językami regularnymi, tzn. jeśli język L jest bezkontekstowy a język R jest* regularny*, to język $L \cap R$ jest bezkontekstowy.*

Fakt 4 *Rodzina języków bezkontekstowych jest zamknięta na ilorazy przez języki regularne, tzn. jeśli język L jest bezkontekstowy a język R jest* regularny*, to języki LR^{-1} i $R^{-1}L$ są bezkontekstowe.*

Fakt 5 *Rodzina języków bezkontekstowych jest zamknięta na* podstawienia*, tzn. jeśli język L jest bezkontekstowy i $f : \Sigma \to P(\Gamma^*)$ jest funkcją taką, że, dla każdego $\sigma \in \Sigma$, $f(\sigma)$ jest językiem bezkontekstowym, to $\hat{f}(L)$ jest językiem bezkontekstowym.*

Fakt 6 *Rodzina języków bezkontekstowych jest zamknięta na przeciwobrazy homomorficzne, tzn. jeśli* $f : \Sigma \to \Gamma^*$ *jest homomorfizmem i* $M \subseteq \Gamma^*$ *jest bezkontekstowy, to język*

$$\hat{f}^{-1}(M) = \{w \in \Sigma^* : \hat{f}(w) \subseteq M\}$$

jest bezkontekstowy.

Ćwiczenia

1. (*) Dowieść, że każdy język bezkontekstowy nad jednoliterowym alfabetem jest regularny.
2. Czy przy pomocy automatu skończonego można rozpoznać, ze w słowie nad alfabetem $\{a, b, c\}$ jedna z liter występuje co najmniej tyle samo razy co dwie pozostałe? Czy można rozpoznać tę własność przy pomocy automatu ze stosem?
3. Dowieść, że język $\{ww : w \in \Sigma^*\}$ nie jest bezkontekstowy, o ile $|\Sigma| \geq 2$.
4. Niech L będzie językiem regularnym. Które z następujących języków są regularne lub bezkontekstowe?
   - $\{ww : w \in L\}$
   - $\{ww^R : w \in L\}$
   - $\{wv^R : w, v \in L\}$
5. Dowieść, że język $\{a^i b^j c^k : i \neq j,\ j \neq k\}$ nie jest bezkontekstowy.
6. Dowieść, że język $\{w\$v : v$ jest podsłowem $w\}$ nie jest bezkontekstowy, natomiast język $\{w\$v^R : v$ jest podsłowem $w\}$, jest bezkontekstowy.
7. Czy nastepujacy zbiór jest językiem bezkontekstowym:

   > Zbior słów $p\$w$, gdzie p jest wyrażeniem regularnym nad alfabetem $\{a, b\}$, a w jest słowem należącym do języka wyznaczonego przez p.

   Analogiczne pytanie dla $p\$w^R$.
8. Niech A – alfabet, $A' = \{a' : a \in A\}$. Określamy homomorfizmy h, h_1, h_2 z $A \cup A'$ w A następująco: $h(a) = h(a') = a$, $h_1(a) = a$, $h_1(a') = \epsilon$, $h_2(a) = \epsilon$, $h_2(a') = a$.

   Definiujemy *przeplot* języków L_1 i L_2:

   $$\text{Shuffle}(L_1, L_2) = \{x : (\exists y \in h^{-1}(x)) h_1(y) \in L_1 \wedge h_2(y) \in L_2\}$$

   Dowieść, że
   (a) przeplot dwóch jezyków regularnych jest regularny,
   (b) przeplot języka bezkontekstowego z regularnym jest bezkontekstowy,
   (c) przeplot dwóch jezykow bezkontekstowych nie musi być bezkontekstowy (wskazówka: $\{a^n b^m c^n d^m : n, m \in N\}$ nie jest bezkontekstowy)