Kolokwium z Teorii Informacji, 13.12.2017

Czas: 1h 30min. *W czasie kolokwium nie można korzystać z materiałów pisanych ani elektronicznych.*

Zadanie 1. Niech X, Y będą niezależnymi zmiennymi losowymi o wartościach w zbiorach $\{a, b, c\}$ i $\{d, e, f\}$, odpowiednio, i mającymi rozkłady:

$$p(X=a)=\frac{1}{3}, \qquad p(X=b)=\frac{1}{2}, \qquad p(X=c)=\frac{1}{6}$$
$$p(Y=d)=\frac{1}{2}, \qquad p(Y=e)=\frac{1}{4}, \qquad p(Y=f)=\frac{1}{4}.$$

Pokazać, że istnieje taki kod bezprefiksowy $k : \{a, b, c\} \times \{d, e, f\} \to \{0, 1\}^*$, że $E(k(X, Y)) \leq 3$.

Zadanie 2. Niech X, Y, Z będą trzema dyskretnymi zmiennymi niezależnymi. Wykaż następującą nierówność:

$$3H(X, Y, Z) \leq 2\left(H(X, Y) + H(Y, Z) + H(Z, X)\right).$$

Wskazówka: skorzystaj z nierówności (9) poniżej.

Zadanie 3. Niech Γ będzie kanałem komunikacyjnym o alfabecie wejściowym $\mathcal{A}$ i wyjściowym $\mathcal{B}$. Przypuśćmy, że istnieje liczba rzeczywista $\delta > 0$ oraz funkcja $\Delta : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ o następującej własności: dla dowolnej pary zmiennych losowych tworzącej parę wejście-wyjście dla kanału Γ (tj. $A \to \boxed{\Gamma} \to B$), zachodzi $H(A \mid \Delta(B)) \leq \delta$. Pokazać, że $|\mathcal{A}| \leq |\mathcal{B}| \cdot 2^{\delta}$.

Pomocnicze wzory rachunkowe z teorii informacji

$$H(X|Y) = \sum_y p(Y=y)H(X|Y=y) \tag{1}$$
$$H(X,Y) = H(X) + H(Y|X) \tag{2}$$
$$I(X;Y) = H(X) + H(Y) - H(X,Y) = H(X) - H(X|Y) \tag{3}$$
$$0 \leq H(X|Y) \leq H(X) \leq H(X,Y) \leq H(X) + H(Y) \tag{4}$$
$$0 \leq I(X;Y) \leq H(X) \tag{5}$$

$$H(X,Y|Z) = H(X|Z) + H(Y|X,Z) \tag{6}$$
$$I(X;Y|Z) = H(X|Z) + H(Y|Z) - H(X,Y|Z) = H(X|Z) - H(X|Y,Z) \tag{7}$$
$$0 \leq H(X|Y,Z) \leq H(X|Z) \leq H(X,Y|Z) \leq H(X|Z) + H(Y|Z) \tag{8}$$
$$0 \leq I(X;Y|Z) \leq H(X|Z) \tag{9}$$

$$H(X_1, \ldots, X_n) = \sum_{i=1}^{n} H(X_i|X_1, \ldots, X_{i-1}) \tag{10}$$
$$I(X_1, \ldots, X_n; Y) = \sum_{i=1}^{n} I(X_i; Y|X_1, \ldots, X_{i-1}) \tag{11}$$

Dla binarnego kanału symetrycznego (BSC) Γ o macierzy $\begin{pmatrix} p & 1-p \\ 1-p & p \end{pmatrix}$,

$$C_\Gamma = 1 - H(p), \text{ gdzie } H(x) = -x\log_2 x - (1-x)\log_2(1-x). \tag{12}$$